



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่อง
แคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงสำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลน
ครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

**(The Development of Mathematics Instruction
in Learning Calculus Emphasizing Connection Skills
of High School Students by Using Virtual Classroom
for the Schools Lack of Mathematics Teacher in the
Three Southern Border Provinces)**

โดย

ลิลลา อุดุลยศาสน์

โชพีร์ หะยีญูโซ๊ะ

ได้รับทุนอุดหนุนจากงบประมาณแผ่นดินประจำปี 2554

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีโดยได้รับความอนุเคราะห์จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภา ขธิกุล อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา, อาจารย์สุธินันท์ บุญพัฒนาภรณ์ ครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) และ อาจารย์สุนีย์ เวชพราหมณ์ ครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสุราษฎร์ธานี ที่เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจประเมินคุณภาพของเครื่องมือวิจัยและกรุณาให้คำแนะนำ ตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์จากผู้อำนวยการโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาการ” ที่อนุญาตให้ใช้สถานที่ และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้ ตลอดจนขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา ที่ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้

คณะผู้วิจัย

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

ชื่องานวิจัย : การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

ผู้วิจัย : นางลิลลา อุดลยศาสน์
นายไซฟีร์ หะยียูโซ๊ะ

ปีที่ทำการวิจัย : 2554

บทคัดย่อ

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 จากโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ได้แก่ โรงเรียนกาบังพิไทยคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสาขานูรี “แจ้งประชากร” จำนวนทั้งสิ้น 94 คน ที่ได้จากการเลือกแบบเจาะจง จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual classroom) จำนวน 12 แผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นเวลาทั้งสิ้น 42 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการเรียนการสอน ผู้วิจัยทำการประเมินผลด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และแบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ผลการวิจัย พบว่า

1. นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนเท่ากับ 40.35 ซึ่งต่ำกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

2. ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) เท่ากับ 3.79 ซึ่งอยู่ในระดับมาก อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

Research Title : The Development of Mathematics Instruction in Learning Calculus Emphasizing Connection Skills of High School Students by Using Virtual Classroom for the Schools Lack of Mathematics Teacher in the Three Southern Border Provinces.

Researchers : Mrs. Lilla Adulyasas
Mr. Sofee Hayeyusoh

Year : 2011

Abstract

The purposes of this research are to develop the mathematics instruction in learning Calculus emphasizing connection skills of high school students by using Virtual Classroom for the schools lack of mathematics teacher in the three southern border provinces, and to study the learning achievement and the satisfaction of high school students in the schools lack of mathematics teacher in the three southern border provinces, who learn Calculus emphasizing connection skills through the Virtual Classroom that the researchers have created.

The samples are students in high school level, grade 11 and 12, from the schools lack of mathematics teacher in the three southern border provinces: Kabang Pittayakom School, Bacho School, and Saiburi “Chaengprachakarn” School, for overall 94 students, obtained by purposive sampling. Then the researchers let the sampled students learn Calculus emphasizing connection skills of high school level through the Virtual Classroom for 12 lesson plans in overall 42 hours. When the learning and teaching ended, the researchers carry on evaluation with the test to measure the learning achievement in Calculus of high school level, and with the questionnaire to measure the level of satisfaction in learning Calculus emphasizing connection skills through the Virtual Classroom.

From the research results, it reveals that:

1. The learning achievement of students who learn Calculus emphasizing connection skills through the Virtual Classroom is 40.35 after being taught which is below the standard of 50% and the result is significant at the 0.05 level of significant.

2. The level of satisfaction of students who learn Calculus emphasizing connection skills for high school level through the Virtual Classroom system is 3.79 which is at a high level and the result is significant at the 0.05 level of significant.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
สารบัญ	ฉ
สารบัญตาราง	ฅ
สารบัญภาพประกอบ	ฉุ
บทที่ 1 บทนำ	1
ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
ขอบเขตการศึกษา	4
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
นิยามศัพท์เฉพาะ	6
สมมุติฐานของการวิจัย	7
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
ความหมายและจุดมุ่งหมายของการเชื่อมโยง	9
คณิตศาสตร์กับการเชื่อมโยง	10
มาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยง	13
ทิศทางของคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา	15
การเชื่อมโยงในลักษณะต่างๆ	16
การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง	20
แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง	22
เทคโนโลยีเพื่อการเรียนการสอน	22
เทคโนโลยีของเว็บไซต์	23
การจัดการข้อมูล	25
การจัดห้องเรียนเสมือนจริง	25
ประเภทของห้องเรียนเสมือนจริง	27
การออกแบบห้องเรียนเสมือนจริง	28

	หน้า
ลักษณะการจัดการเรียนการสอนแบบห้องเรียนเสมือนจริง	28
ลักษณะของห้องเรียนเสมือนจริงสำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์	29
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยง	30
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับห้องเรียนเสมือนจริง	35
กรอบแนวคิดของการวิจัย	38
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	39
การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน	39
การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	39
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	40
ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือวิจัย	41
การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล	45
การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้	46
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	48
ตอนที่ 1 การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้	49
ตอนที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จำนวน 3 โรงเรียน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)	50
ตอนที่ 3 ความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)	54
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	62
สรุปผลการวิจัย	62
อภิปรายผล	66

	หน้า
ข้อเสนอแนะ	69
บรรณานุกรม	70
ภาคผนวก	77
รายนามผู้เชี่ยวชาญ	78
หนังสือขอความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือวิจัย	79
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	83
แผนการจัดการเรียนรู้และใบงาน	84
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพร้อมเฉลย	279
แบบสอบถามวัดความพึงพอใจ	292
ตัวอย่างการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง	296
รายชื่อโรงเรียนกลุ่มตัวอย่าง	305
ประวัติย่อผู้วิจัย	306

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม	50
2	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนบาเจาะ	51
3	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร”	51
4	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง รวม 3 โรงเรียน	52
5	ร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนผ่านเกณฑ์ 50%	52
6	ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 %	53
7	จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถาม จำแนกตามโรงเรียน	54
8	จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนกาบังพิทยาคม จำนวน 33 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน	55
9	จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนบาเจาะ จำนวน 20 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน	55

ตารางที่		หน้า
10	จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชากร” จำนวน 10 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน	56
11	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชากร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน	57
12	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชากร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)	58
13	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในภาพรวม	59
14	ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป	60

สารบัญภาพ

ภาพประกอบที่		หน้า
1	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และเวลา เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่	17
2	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และเวลา เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่	17
3	ภาพแสดงอัตราส่วนของเนยที่ใช้ในรายการอาหาร	20

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัจจุบันโลกมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ทั้งทางด้านเศรษฐกิจ สังคม วิทยาศาสตร์ และ เทคโนโลยี ส่งผลให้ทุกประเทศทั่วโลกมุ่งพัฒนาบุคลากรของตนเอง ให้เป็นผู้มีความรู้ความสามารถ ทนต่อการเปลี่ยนแปลงของโลกปัจจุบัน สำหรับประเทศไทยของเราก็เช่นเดียวกัน ที่มุ่งพัฒนาคนและคุณภาพของคน แต่สิ่งสำคัญที่จะพัฒนาคนและคุณภาพของคนได้นั้นคือ การศึกษา ดังที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติพุทธศักราช 2542 ได้กำหนดแนวทางในการปฏิรูปการศึกษา โดยให้ความสำคัญกับผู้เรียนเป็นหลัก วิชาคณิตศาสตร์ถือเป็นวิชาหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาคน เพราะคณิตศาสตร์ส่งเสริมให้คนมีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล มีระบบ ระเบียบ แบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม ทำให้คนเป็นคนที่มีสมบูรณ์ คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น มีความสมดุลทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา อารมณ์ และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2545: 1) นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทสำคัญต่อโลกของวิทยาการหลายสาขา ทั้งเศรษฐกิจ สังคม วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี ตลอดจนเป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยทุกประเภท ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวที่ว่า “คณิตศาสตร์เป็นรากฐานของวิทยาการหลายๆสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ก็ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น” (ยุพิน พิพิธกุล, 2536: 1) จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าวข้างต้น ทำให้คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่ถูกรับรู้อยู่ในทุกระดับชั้น โดยปัจจุบันประเทศไทยใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วย 6 สาระการเรียนรู้ แบ่งเป็นสาระการเรียนรู้ในเชิงเนื้อหา 5 สาระ ประกอบด้วย จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต และ การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น ส่วนสาระที่ 6 เป็นสาระที่เกี่ยวกับทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

แคลคูลัสเป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่งในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งอยู่ในสาระการเรียนรู้พีชคณิตในระดับช่วงชั้นที่ 4 เนื่องจากแคลคูลัสเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาและนำไปใช้ประยุกต์ในวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์สาขาต่างๆ อีกมากมาย (ศรีบุตร แววจริญ; และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2542: คำนำ) แคลคูลัสจึงมีความสำคัญเสมือนเป็นเครื่องมือที่จำเป็นอย่าง

หนึ่งในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ดังนั้นจึงต้องให้ความสำคัญในการเรียนการสอนเรื่องแคลคูลัสตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่เนื่องจากลักษณะที่สำคัญประการหนึ่งของคณิตศาสตร์ คือ เป็นวิชาที่มีความต่อเนื่องกันเป็นลำดับขั้น การเรียนรู้เนื้อหาบางเรื่องทำไม่ได้เลยถ้าไม่เรียนรู้เรื่องที่เป็นพื้นฐานมาก่อน ดังนั้นสาเหตุประการหนึ่งที่ทำให้ผู้เรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ก็คือ การที่ต้องเรียนเรื่องใหม่โดยที่ยังขาดความรู้ความเข้าใจในเรื่องเดิมที่เป็นพื้นฐานของเรื่องใหม่ทำให้ไม่สามารถเกิดการเรียนรู้เรื่องใหม่ที่กำลังเรียนได้ (ดวงเดือน อ่อนน้อม.2533: 33) ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้และมีพื้นฐานในการที่จะนำไปศึกษาต่อ นั้น จำเป็นจะต้องเชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆ ภายในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ โดยใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และในการแก้ปัญหา นอกจากนี้แล้วยังต้องมีการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับความเป็นอยู่ในชีวิตประจำวันอีกด้วย (กระทรวงศึกษาธิการ.2545: 203-205) การเชื่อมโยงความรู้จึงถือเป็นทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่จะช่วยให้การเรียนมีประสิทธิภาพ ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอน ครูผู้สอนจึงควรบูรณาการสาระต่างๆ เข้าด้วยกันเท่าที่จะเป็นไปได้ และควรจัดกิจกรรมหรือกำหนดสถานการณ์ปัญหาสอดคล้องในการเรียนรู้อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นถึงการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ หรือนำความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนกำหนดขึ้น เพื่อให้เห็นความเชื่อมโยงภายในวิชาคณิตศาสตร์ ความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือเห็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน (ทรงชัย อักษรคิด. 2548: 33)

แม้ว่าสาระการเรียนรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญเพียงใดก็ตาม แต่สภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในพื้นที่ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ที่ผ่านมายังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร สืบเนื่องจากสถานการณ์ความไม่สงบที่เกิดขึ้นในพื้นที่อย่างต่อเนื่อง ทำให้ข้าราชการ พนักงานราชการ ครูอัตราจ้าง ซึ่งอยู่ในพื้นที่ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ มีอัตราความเสี่ยงสูงจากการโดนทำร้ายและการเสียชีวิต ทั้งระหว่างการเดินทางไปสอน และระหว่างการสอน จึงส่งผลกระทบต่อการศึกษาและครู โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูคณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นสาขาที่ขาดแคลนอยู่แล้ว ดังที่ชนิตา รัชภัทลเมืองและคณะ (2548:35) กล่าวว่าโรงเรียนที่ขาดแคลนครูส่วนมากเป็นโรงเรียนระดับมัธยม โรงเรียนขนาดเล็กและโรงเรียนที่ตั้งในเขตชนบท สาขาวิชาที่ขาดครูมากที่สุด ได้แก่ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและภาษาต่างประเทศ (ภาษาที่สอง)

คณะผู้วิจัยมีความต้องการที่จะหาวิธีการในการแก้ไขปัญหาของการขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ในพื้นที่ 3 จังหวัดชายแดนใต้ซึ่งเกิดจากเหตุการณ์ความไม่สงบในพื้นที่ เพื่อให้ นักเรียนได้เรียนตามปกติเหมือนนักเรียนที่อยู่ในพื้นที่อื่นๆ ผู้วิจัยเล็งเห็นว่าเทคโนโลยีระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) น่าจะสามารถแก้ไขปัญหาการขาดแคลนครูได้ เนื่องจากห้องเรียนเสมือนจริง สามารถจำลองชั้นเรียนจริงโดยใช้เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมต่อกับระบบอินเทอร์เน็ตเข้าไปเรียนผ่านระบบที่ออกแบบแบบกระบวนการเรียนการสอนให้มีสภาพแวดล้อมคล้ายกับการเรียนจริงในห้องเรียนผ่านการถ่ายทอดสด หรือเทปบันทึกภาพกระบวนการเรียนการสอนจึงไม่ใช่การเดินทางไปเรียนในห้องเรียนแต่เป็นการเรียนการสอนทางไกลที่ผู้เรียนสามารถเรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้จากครูผู้สอนเสมือนห้องเรียนจริง แต่ผ่านระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ และดำเนินการเรียนตามกิจกรรมที่ผู้สอนได้ออกแบบไว้ ผู้เรียนและผู้สอนสามารถมีปฏิสัมพันธ์หรือถาม-ตอบปัญหาที่เกี่ยวกับบทเรียนผ่านการสนทนาในระบบ (Chat) โดยห้องเรียนเสมือนจริงจะปรากฏในรูปแบบ โสมเพจ ที่ถูกออกแบบให้มีความสวยงามด้วยภาพถ่าย ภาพกราฟิก ตัวอักษรและการให้สีสันทัดตึงดึงดูดความสนใจของผู้เรียน นอกจากการเรียนการสอนแล้ว ยังมีเว็บเพจอื่นๆที่อำนวยความสะดวกด้านการเรียนให้แก่ผู้เรียนและผู้สนใจ เช่น เว็บเพจประกาศข่าว เว็บเพจประมวลวิชา เว็บเพจเนื้อหา เว็บเพจแสดงความคิดเห็น เว็บเพจสรุปบทเรียน เว็บเพจตอบปัญหา เว็บเพจแหล่งทรัพยากรการเรียนรู้ เว็บเพจ การประเมินผล และเว็บเพจอื่นๆตามที่ถูกออกแบบไว้ ปัจจุบันมหาวิทยาลัยชั้นนำทั้งในและต่างประเทศเริ่มมีการใช้เทคโนโลยีระบบห้องเรียนเสมือนจริง และในอนาคตเทคโนโลยีนี้จะนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการจัดการเรียนการสอนแทนการสอนแบบปกติ

ดังนั้นผู้วิจัยจึงเกิดแนวคิดในการที่จะพัฒนาการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ทั้งนี้เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์หรือวิชาอื่นๆใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ขอบเขตของการศึกษา

ประชากร

การศึกษาวิจัยครั้งนี้ประชากรคือ นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ ในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

กลุ่มตัวอย่าง

การศึกษาครั้งนี้ประกอบไปด้วยกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 3 กลุ่มคือ

1. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ในจังหวัดยะลา จำนวน 1 โรงเรียน โรงเรียนละ 1 ห้อง
2. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ในจังหวัดปัตตานี จำนวน 1 โรงเรียน โรงเรียนละ 1 ห้อง
3. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ในจังหวัดนราธิวาส จำนวน 1 โรงเรียน โรงเรียนละ 1 ห้อง

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาทำการวิจัยครั้งนี้คือ 1 ปี (15 พฤศจิกายน 2553 – 14 พฤศจิกายน 2554)

ตัวแปร

1) ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) ได้แก่ รูปแบบการจัดการเรียนการสอน การสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

2) ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ได้แก่

2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

2.2 ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาเรื่องแคลคูลัส ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามมาตรฐานหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

2. นักเรียนในโรงเรียนที่ขาดครูมีโอกาสได้เรียนเหมือนนักเรียนโรงเรียนปกติผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

3. นักศึกษาคณะครุศาสตร์สามารถใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) เพื่อเป็นแหล่งในการฝึกประสบการณ์วิชาชีพโดยการทดลองสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) แก่นักเรียนในโรงเรียนที่ขาดครูหรือโรงเรียนอื่นๆ

4. นักศึกษาคณะครุศาสตร์สามารถใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) เพื่อเป็นแหล่งในการบริการวิชาการโดยให้ความรู้หรือการตอบคำถามผ่านระบบแก่นักเรียนในโรงเรียนที่ขาดครูหรือโรงเรียนอื่นๆที่ต้องการความรู้วิชาการ

5. มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลามีศูนย์การเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Center of Learning by Using Virtual Classroom) เพื่อใช้ในการจัดการเรียนการสอนทั้งในมหาวิทยาลัยและการบริการวิชาการสู่สังคม

6. มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลามีระบบต้นแบบสำหรับการเรียนการสอนทางไกล

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. เนื้อหาเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง หมายถึง เนื้อหาเรื่องแคลคูลัสตามหลักสูตรหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม โดยผู้วิจัยได้ออกแบบแผนการสอนที่เน้นการทักษะเชื่อมโยง 3 ด้าน คือ

- เชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆภายในวิชาคณิตศาสตร์
- เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ
- เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับความเป็นอยู่ในชีวิตประจำวัน

2. ระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) หมายถึง ระบบการจัดการเรียนการสอนที่ใช้เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมต่อกับระบบอินเทอร์เน็ตเข้าไปเรียนผ่านระบบที่ออกแบบแบบกระบวนการเรียนการสอนให้มีสภาพแวดล้อมคล้ายกับการเรียนจริงในห้องเรียนผ่านการถ่ายทอดสด หรือเทปบันทึกภาพ ผู้เรียนและผู้สอนสามารถมีปฏิสัมพันธ์หรือถาม-ตอบปัญหาที่เกี่ยวข้องบทเรียนผ่านการสนทนาในระบบ (Chat) นอกจากนี้ผู้เรียนยังสามารถ Download การบ้าน แบบฝึกหัด ส่งงานผ่านระบบ ทำข้อสอบ และประเมินความพึงพอใจผ่านระบบได้ โดยห้องเรียนเสมือนจริงจะปรากฏในรูปแบบโฮมเพจ

3. รูปแบบการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง หมายถึง การเรียนการสอนตามคาบเรียนปกติที่โรงเรียนกำหนดไว้ เพียงแต่ไม่ได้เรียนกับครูจริง นักเรียนจะต้อง login เข้าสู่ระบบก่อนเพื่อเป็นการเช็คชื่อประจำคาบเรียนนั้นๆ และเข้าไปเรียนในระบบห้องเรียนเสมือนจริงตามตารางเนื้อหาของคาบเรียนนั้นๆ ระหว่างการเรียน นักเรียนสามารถปรึกษาผู้สอนที่อยู่ต่างประเทศได้ ซึ่งผู้สอนจะต้อง login เข้ามาในเวลาเดียวกันกับคาบเรียนของนักเรียน เพื่อตอบคำถามนักเรียนเมื่อนักเรียนมีคำถามหรือข้อสงสัยในบทเรียน นอกจากนี้ผู้เรียนยังสามารถ Download การบ้าน แบบฝึกหัด และส่งงานผ่านระบบ หลังจากการเรียนเนื้อหาครบทุกบทแล้ว นักเรียนจะต้องทำการสอบผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

4. นักเรียน หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เรียนอยู่ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ ที่ต้องเรียนในเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสตามหลักสูตรหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

5. โรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ หมายถึง โรงเรียนที่สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ โดยจะต้องเป็นโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ เช่น ครุคณิตศาสตร์มีจำนวนไม่เพียงพอ หรือครูที่สอนคณิตศาสตร์อยู่เป็นครูที่จบไม่ตรงวุฒิ เป็นต้น

6. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่วัดผลการเรียนรู้ของนักเรียนตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตรหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม แต่ไม่ได้วัดทักษะการเชื่อมโยงของนักเรียน

7. แบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจ หมายถึง แบบสอบถามที่วัดระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 %
2. นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจมากกว่า 3.50

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

- 2.1 ความหมายและจุดมุ่งหมายของการเชื่อมโยง
- 2.2 คณิตศาสตร์กับการเชื่อมโยง
- 2.3 มาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยง
- 2.4 ทิศทางของคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา
- 2.5 การเชื่อมโยงในลักษณะต่างๆ
- 2.6 การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง
- 2.7 แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง
- 2.8 เทคโนโลยีเพื่อการเรียนการสอน
- 2.9 เทคโนโลยีของเว็บไซต์
- 2.10 การจัดการข้อมูล
- 2.11 การจัดห้องเรียนเสมือนจริง
- 2.12 ประเภทของห้องเรียนเสมือนจริง
- 2.13 การออกแบบห้องเรียนเสมือนจริง
- 2.14 ลักษณะการจัดการเรียนการสอนแบบห้องเรียนเสมือนจริง
- 2.15 ลักษณะของห้องเรียนเสมือนจริงสำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์
- 2.16 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยง
- 2.17 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับห้องเรียนเสมือนจริง

2.1 ความหมายและจุดมุ่งหมายของการเชื่อมโยง

ความหมายของการเชื่อมโยง

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) (NCTM. 1991: 102) ได้ให้ความหมายของการเชื่อมโยง (Connections) ไว้ว่า การเชื่อมโยง หมายถึง การผสมผสานแนวคิดที่มีความเกี่ยวข้องกันให้รวมเป็นองค์ประกอบเดียวกัน ซึ่งแบ่งออกเป็น

1) การเชื่อมโยงภายในวิชา เป็นการนำเนื้อหาภายในวิชาเดียวกันไปสัมพันธ์กัน ให้ผู้เรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะไปใช้ในชีวิตจริง ช่วยนักเรียนให้ทำความเข้าใจถึงความแตกต่างของเนื้อหาวิชา รวมทั้งพีชคณิต เรขาคณิต และตรีโกณมิติ ซึ่งจะทำให้การเรียนรู้ของผู้เรียนมีความหมาย

2) การเชื่อมโยงระหว่างวิชา เป็นการรวมศาสตร์ต่างๆตั้งแต่ 2 สาขาขึ้นไป ภายใต้หัวข้อที่เกี่ยวข้องกันให้มาสัมพันธ์กัน เช่น วิชาคณิตศาสตร์กับวิชาวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคม กีฬา หรือศิลปะ เป็นการเรียนรู้โดยใช้ความรู้ ความเข้าใจ และทักษะในวิชาต่างๆมากกว่า 1 วิชาขึ้นไป จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่ลึกซึ้ง และตรงกับสภาพชีวิตจริง

กล่าวโดยสรุป การเชื่อมโยง หมายถึง การนำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาสัมพันธ์กับความรู้หรือแนวคิดที่เกี่ยวข้อง เพื่อใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ หรือช่วยในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนกำหนดขึ้น ซึ่งแบ่งออกเป็น การเชื่อมโยงความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

จุดมุ่งหมายของการเชื่อมโยง

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics: NCTM) (NCTM. 1991) ได้กล่าวว่า เหตุผลที่สนับสนุนการเชื่อมโยงวิชาหนึ่งเข้ากับวิชาอื่นๆในการสอน เช่น การเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์และภาษาไทย การเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับสังคมศึกษา การเชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับศิลปะ ฯลฯ ก็คือ สิ่งที่เกิดขึ้นในชีวิตจริงไม่ได้จำกัดว่าจะเกี่ยวข้องกับสาขาวิชาใดวิชาหนึ่ง โดยเฉพาะตัวอย่างเช่น การเกิดอุทกภัย ซึ่งเป็นเหตุการณ์เดียว แต่ก่อให้เกิดผลกระทบหลายอย่าง เช่น บ้านเรือนไร่นาเสียหาย ธุรกิจหยุดชะงัก โรงเรียนและสถานที่ทำงานต่างๆต้องหยุดทำงาน ก่อให้เกิดความ

เดือรื้อนหลายประการ ในการแก้ปัญหาต่างๆเหล่านี้ เราจำเป็นต้องใช้ความรู้และทักษะจากหลายๆวิชามาร่วมกันแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง

การจัดการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดความสัมพันธ์เชื่อมโยงระหว่างความคิดรวบยอดในศาสตร์ต่างๆจะทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมาย การเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ไม่จำเป็นว่าความคิดรวบยอดจะต้องแยกจากความคิดรวบยอดในวิชาอื่นๆ ไม่ว่าจะเป็นวิชาวิทยาศาสตร์ ภาษา หรือสังคมศึกษา เนื้อหาและกระบวนการเรียนในวิชาหนึ่งอาจช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในวิชาอื่นดีขึ้นได้ การสอนที่สัมพันธ์เชื่อมโยงความคิดรวบยอดจากหลายๆสาขาวิชาเข้าด้วยกันมีประโยชน์หลายอย่าง ที่สำคัญที่สุดคือ ช่วยให้เกิดการถ่ายโอนการเรียนรู้ (Transfer of Learning) ระหว่างสิ่งที่เรียนเข้ากับชีวิตจริงได้ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจว่า สิ่งที่ตนเรียนมีประโยชน์ หรือพร้อมที่จะนำไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริงได้

กล่าวโดยสรุป การเชื่อมโยงจะทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมาย ช่วยให้เกิดการถ่ายโอนการเรียนรู้ระหว่างสิ่งที่เรียนกับชีวิตจริง ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนเห็นถึงคุณค่าและความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

2.2 คณิตศาสตร์กับการเชื่อมโยง

เคนเนดี้ และ ทิปส์ (Kennedy; & Tipps. 1944: 194-198) ได้กล่าวถึงการเชื่อมโยงไว้ดังนี้ การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญ นักเรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรม ได้แก่ รูปภาพ แผนภาพ สัญลักษณ์ และมโนคติ กับกระบวนการรวมเนื้อหาและวิธีการต่างๆทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

การเชื่อมโยงควรสร้างให้เกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอในระหว่างการเรียนการสอน คือให้นักเรียนปฏิบัติงานหรือทำกิจกรรมแล้วแปลงกิจกรรมเหล่านั้นออกมาเป็นรูปภาพ แผนภาพ แผนภูมิ แผนผัง กราฟ และสัญลักษณ์ต่างๆ ตัวอย่างเช่น นักเรียนในชั้นเรียนเกรด 3 ครูได้สอนให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงระหว่าง “ลูกกอล์ฟ” กับ เศษส่วน เพื่อให้นักเรียนในชั้นเรียนนั้นได้รู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

การเชื่อมโยงควรสร้างให้เกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอในระหว่างการเรียนการสอน คือให้นักเรียนปฏิบัติงานหรือทำกิจกรรมแล้วแปลงกิจกรรมเหล่านั้นออกมาเป็นรูปภาพ แผนภาพ แผนภูมิ แผนผัง กราฟ และสัญลักษณ์ต่างๆ

การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆและกับชีวิตจริงเกิดขึ้นได้มากมาย ครูสามารถให้นักเรียนปฏิบัติงานที่จะเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ สังคมศึกษา ศิลปะ งานกิจกรรมเกี่ยวกับอาหาร และกิจกรรมในวิชาต่างๆ

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงวิธีที่ครูจะสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์ต่างๆ และสังคมรอบตัว ด้วยการให้นักเรียนทำโครงการที่บางโครงการอาจให้ร่วมกันทำทั้งชั้นรายบุคคล หรือทำโดยกลุ่มย่อย ดังนี้

1) คณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ เช่น

- การจดบันทึกอุณหภูมิ ความเร็วลม และแรงดันอากาศ
- การส่งมนุษย์ไปดวงจันทร์
- การโคจรของดาวเคราะห์
- การกำหนดมาตรฐานและการสร้างแบบจำลองของระบบสุริยะจักรวาล

2) คณิตศาสตร์กับสังคมศึกษา เช่น

- นาฬิกาและนาฬิกาทราย
- การสร้างพีระมิดในอียิปต์
- ศึกษาการออกแบบพรม ถ้วยชาและตะกร้าที่ใช้หลักการสมมาตร และรูปทรง

ลูกบาศก์ของชาวอินเดียแดงทางตะวันตกเฉียงใต้ของสหรัฐอเมริกา

- การแยกประเภทของอาชีพต่างๆ เป็นอาชีพที่มีรูปแบบและไม่มีรูปแบบ เช่น นักวิจัย ผู้ให้บริการ คนงานโรงงาน ทหาร และปศุสัตว์

- การเปรียบเทียบส่วนที่สูงที่สุดและต่ำที่สุด เช่น จุดที่สูงที่สุดของพื้นโลก กับจุดที่ต่ำที่สุดของก้นทะเล

3) คณิตศาสตร์กับศิลปะ

- การวัดกระดาษเพื่อติดขอบผนัง
- การกำหนดมาตราส่วนฉากละครในชั้นเรียน วัดและเตรียมกระดาษสร้างฉาก
- การวาดภาพทิวทัศน์ต่างๆ

4) คณิตศาสตร์กับสุขศึกษา

- การวัดความสูงของนักเรียน บันทึกผลในรูปตารางและกราฟ
- การหาปริมาณแคลอรีจากการอ่านฉลากข้อมูลโภชนาการข้างกล่องผลิตภัณฑ์
- การวัดระดับคลอเรสเตอรอล

5) คณิตศาสตร์กับการอ่านและศิลปะทางภาษา

- การหารูปแบบของคำ การแยกประเภทของคำ

- การวิจัยรากศัพท์ของภาษาคณิตศาสตร์
- การวิจัยและเขียนเรื่องราวของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง
- จำนวนและความงามของตัวเลข
- การวิเคราะห์ข้อความเพื่อบอกจำนวนพยัญชนะ (เรื่องนี้สามารถเชื่อมโยงกับ

รายการเกมโชว์ทางโทรทัศน์ของสหรัฐอเมริกาที่ชื่อ Wheel of Fortune)

6) คณิตศาสตร์กับพลศึกษา

- การนับจำนวนรอบของการกระโดดเชือก
- การตัดสินว่ากีฬาโอลิมปิกเป็นการแข่งขันที่มีขนาดใหญ่หรือไม่
- การจัดวางพื้นที่การเล่น
- การจับเวลาการแข่งขัน

คณิตศาสตร์กับโลกปัจจุบันเชื่อมโยงกันในหลายด้าน จากบทความในหนังสือพิมพ์หรือนิตยสาร ไม่ว่าจะเป็นทางด้านธุรกิจ แนวโน้มทางเศรษฐกิจ สภาพอากาศ และข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ การรายงานพิเศษทั้งในรูปแบบบทความและภาพข่าว แผนผังการเดินทางที่ท่าเรือสถานีรถไฟ และสนามบิน ล้วนให้ข้อมูลที่เป็นคณิตศาสตร์เพื่ออำนวยความสะดวกแก่ผู้คนทั้งสิ้น ปัญหาทางเศรษฐกิจ ปัญหาการจัดการขยะและมลพิษที่เกิดจากรถยนต์ ของเสียจากโรงงาน ได้ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับการดำรงชีวิตในปัจจุบัน ครูจึงควรสอนโดยบูรณาการคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆหรือกับปัญหาในชีวิตจริงที่เกิดขึ้นในแต่ละวัน

ดังนั้นนักเรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อจะได้บูรณาการเนื้อหาทั้งหมด ครูจะประสบความสำเร็จเมื่อทำให้นักเรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงมโนคติของเนื้อหาต่างๆเข้าด้วยกัน เช่น เศษส่วนและทศนิยมกับเรื่องของเปอร์เซ็นต์ การคูณกับการบวก การหารกับการลบ และนำการวัดไปใช้ในเรขาคณิต นักเรียนต้องรู้จักเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงได้

คอสมีย์ และคณะ (Dossey; et al. 2002: 81-83) กล่าวถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ว่า ความเข้าใจในคณิตศาสตร์สร้างขึ้นได้ทันทีขณะเกิดการเรียนรู้ โดยสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ใหม่และความรู้ที่ส่วนหนึ่งเคยเรียนรู้มาแล้ว นักเรียนที่สามารถเชื่อมโยง มโนคติทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลายจะพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ได้มากยิ่งขึ้น การเชื่อมโยงทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา และสามารถทำการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้คล่องแคล่วขึ้น นอกเหนือจากการใช้เครื่องมืออื่นๆในการแก้ปัญหา มโนคติหรือเนื้อหาในคณิตศาสตร์ที่มีการเชื่อมโยงจะช่วยให้เด็กนักเรียนมองคณิตศาสตร์แบบบูรณาการ เราเคยแยกวิชาคณิตศาสตร์เป็น วิชาย่อยๆ เช่น เรียน Pre-Algebra แล้วมาเรียนพีชคณิต และเรขาคณิต ตามลำดับ ทำให้นักเรียน

มองวิชาคณิตศาสตร์ไม่สัมพันธ์กัน แม้ว่าคอร์สเรียนก่อนหน้าจะเป็นพื้นฐานความเข้าใจในคณิตศาสตร์ระดับสูง การแยกเนื้อหาออกจากกันทำให้นักเรียนไม่สามารถสร้างการเชื่อมโยงที่ทำให้เข้าใจภาพรวมทางคณิตศาสตร์ การเรียนที่เน้นการเชื่อมโยงจะทำให้นักเรียนสร้างความรู้สึกลึก (Sense) และเป็นการสร้างรากฐานอันแข็งแกร่งในการเรียนคณิตศาสตร์ต่อไป

กล่าวโดยสรุป ความเข้าใจในคณิตศาสตร์สามารถสร้างขึ้นได้ทันทีขณะเกิดการเรียนรู้ โดยสร้างการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ใหม่และความรู้ที่ส่วนหนึ่งเคยเรียนรู้มาแล้ว นักเรียนที่สามารถเชื่อมโยงมโนคติทางคณิตศาสตร์ได้หลากหลาย จะพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ได้มากยิ่งขึ้น ดังนั้นครูจึงควรจัดการเรียนการสอน เพื่อทำให้นักเรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติต่างๆทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

2.3 มาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยง

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics) (NCTM, 2000: 64-66) ได้กำหนดมาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยง (Connection Standard) ไว้ดังนี้

โปรแกรมการสอนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงเกรด 12 มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1) ตระหนักและรู้จักเชื่อมโยงความรู้ต่างๆในคณิตศาสตร์

ความคิดที่ว่าคณิตศาสตร์สามารถเชื่อมโยงกันได้ ควรสอดแทรกอยู่ในการเรียนการสอนในโรงเรียนทุกระดับชั้น การให้ประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์กับเด็กในครั้งแรกที่เข้ามาในโรงเรียนไม่ควรแยกเป็นเรื่องราว แต่ควรรวมคณิตศาสตร์เข้ากับหลายๆเหตุการณ์ ซึ่งเด็กสามารถเรียนรู้และจดจำแบบรูปของคณิตศาสตร์จากจังหวะดนตรีเพลงที่ร้อง รูปหกเหลี่ยมในรวงผึ้ง นับจำนวนครั้งที่กระโดดเชือกได้ เมื่อขึ้นไปเรียนในระดับเกรด 3-5 กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรเป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะเริ่มเห็นการเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการทางเลขคณิต ตัวอย่างเช่น การคูณเป็นเหมือนการบวกจำนวนที่ซ้ำกัน รู้ว่าการดำเนินการทางคณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ในเหตุการณ์ต่างๆ ซึ่งจะเป็นการซึมซับความเป็นนามธรรมของคณิตศาสตร์ ในระดับเกรด 6-8 นักเรียนควรมองคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่เชื่อมโยงความรู้ถึงกัน กุญแจสำคัญอยู่ที่การรู้จักเชื่อมโยงความรู้ต่างๆด้วยตนเอง ทั้งเรื่องจำนวนตรรกยะ ลัดส่วน และ ความสัมพันธ์เชิงเส้น ควรสอดแทรกเข้ามาในกิจกรรมการเรียนการสอนทุกครั้ง ในเกรด 9-12 นักเรียนไม่เพียงต้องเรียนรู้ถึงลักษณะของการเชื่อมโยง แต่ต้องสามารถหยั่งรู้ที่จะนำความรู้หนึ่งไปแก้ปัญหาต่างๆ ได้ ตลอดการเรียนตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลถึง

เกรด 12 นักเรียนควรถามตนเองว่า “ปัญหานี้หรือคณิตศาสตร์เรื่องนี้ เหมือนกับปัญหาอื่นๆหรือ เรื่องอื่นที่เคยเรียนมาก่อนหรือไม่ อย่างไร” การเชื่อมโยงเป็นการสร้างแนวคิดใหม่ๆขยายจาก คณิตศาสตร์ที่เคยเรียนมาแล้ว เรียนรู้ในการเตรียมตัวรับความรู้ใหม่ นักเรียนระดับประถมศึกษา รู้จักนำเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกมาโยงเข้ากับการลบทศนิยมและเศษส่วน นักเรียนระดับชั้น มัธยมศึกษาตอนต้นตระหนักและรู้จักวิธีนำเสนอการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่มีแนวคิดเดียวกัน เช่น อัตราส่วนใช้ในการนำเสนออัตราการแข่งขันเพื่อหาความเอียงหรือความชันของเส้นตรง นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายรู้จักเชื่อมโยงแนวคิดในพีชคณิตและเรขาคณิต เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางและเส้นรอบวงของวงกลม ทำการทดลองโดยนำวงกลม ขนาดต่างๆหลายๆรูปมาวัดความยาวของเส้นรอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลาง นักเรียนระดับชั้น มัธยมศึกษาตอนต้นอาจจะนำข้อมูลมาเขียนกราฟ 2 ตัวแปร เส้นรอบวง (c) และเส้นผ่านศูนย์กลาง (d) จะได้แนวเส้นตรงผ่านจุด (0,0) และอัตราส่วนของ c/d คงที่ เมื่อเฉลี่ยค่าของ c/d ที่ได้ จะได้ค่าอยู่ระหว่าง 3.1 และ 3.2 ซึ่งเป็นค่าประมาณของ π ปัญหานี้ได้นำแนวคิดในเรื่องของการวัด การวิเคราะห์ข้อมูล เรขาคณิต พีชคณิต และจำนวน มาใช้

2) เข้าใจคณิตศาสตร์ว่าเชื่อมโยงกันได้อย่างไร และนำความรู้หนึ่งไปสร้างความรู้ใหม่ที่เกี่ยวข้องกันได้

การสั่งสมประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่โรงเรียนของนักเรียนนั้นจะทำให้ความสามารถในการเห็นส่วนที่เกี่ยวข้องกันได้ทางคณิตศาสตร์มีเพิ่มขึ้น นักเรียนในระดับชั้นอนุบาลถึงเกรด 2 จะได้ตระหนักในเรื่องการนับ รู้จักจำนวนและพื้นฐานของวัตถุต่างๆ นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาจะได้ค้นหาการดำเนินการทางเลขคณิตแบบต่างๆ และนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นจะได้ค้นหาตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ รู้จักการสร้างสัดส่วนและความสัมพันธ์เชิงเส้น ส่วนนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจะได้ค้นหาการเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์ในเรื่องต่างๆ ดังตัวอย่าง พีระมิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกตัดยอดสามารถนำมาเป็นแนวทางในการหาสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้

3) ตระหนักและรู้จักประยุกต์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

ในการเรียนคณิตศาสตร์ควรได้ทำงานเกี่ยวกับปัญหาในวิชาอื่นๆบ้าง การเชื่อมโยงสามารถทำได้กับวิชาอื่นๆที่เป็นชีวิตประจำวันของนักเรียน ตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลถึงเกรด 2 นักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานที่มีการเชื่อมโยงกับชีวิตจริง นักเรียนในระดับชั้นเกรด 3 ถึงเกรด 5 ควรจะได้เรียนการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ที่สำคัญกับวิชาอื่นๆ และขยายเพิ่มเติมขึ้นไปอีกในระดับชั้นเกรด 6 ถึง เกรด 8 และในระดับชั้นเกรด 9 ถึงเกรด 12 ควรจะได้ใช้คณิตศาสตร์ไปอธิบายปัญหาประยุกต์ซับซ้อนขึ้น การให้นักเรียนได้รับประสบการณ์

ทางคณิตศาสตร์ด้วยการให้งานถือเป็นเรื่องสำคัญ คณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ในวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ เกษตรศาสตร์ และ บริหารธุรกิจ การเชื่อมต่อกคณิตศาสตร์เข้ากับวิทยาศาสตร์ ไม่ได้ทำแค่เฉพาะเนื้อหา แต่ยังรวมถึงกระบวนการ เนื้อหาและกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ให้เข้ากับการเรียนคณิตศาสตร์ ดังในมาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Education Standards) ที่ระบุไว้ใน 1 ปี โรงเรียนประถมศึกษาจะต้องสอน วิชาวิทยาศาสตร์เรื่องอากาศ การนำคณิตศาสตร์มาเชื่อมโยงกับกิจกรรมการสอนนี้ทำได้หลากหลาย เช่น นักเรียนอาจจะออกแบบเครื่องมือหรืออุปกรณ์วัดสภาพอากาศ วางแผนการจัดการและสื่อสารข้อมูล ตัวอย่างของการประยุกต์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้แก่เรื่อง ที่นักเรียนเกรด 11 ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแห่งหนึ่งได้ไปฝึกงานกับบริษัทซีวีเอสคอเปอร์ชัน ซึ่งกำลังขยายงานด้วยการตั้งสาขาใหม่ในย่านบอสตัน จากข้อมูลที่ทราบ บริษัทไม่ได้คำนึงถึงแต่เฉพาะยอดขายที่จะได้ในอนาคตในการหาทำเลที่ตั้งร้านเท่านั้น ทีมงานของนักเรียนได้รับความช่วยเหลือให้คำปรึกษา จากผู้เชี่ยวชาญด้านการบริหารของบริษัท นักเรียนได้ทำการวิเคราะห์สถิติ ข้อมูลประชากร และข้อมูลทางเศรษฐกิจ ที่ทำให้ทราบถึงอุปสรรคทางการตลาด นักเรียนได้ทำงานกับพนักงานของบริษัท และร่วมประเมินถึงความเป็นไปได้ของทำเลที่ตั้งสาขาแห่งใหม่ นักเรียนได้ทำงานกับสถาปนิกในการออกแบบตัวร้าน และทำงานร่วมกับพนักงานบัญชีในการวางแผนในเรื่องการเงิน

กล่าวโดยสรุป มาตรฐานการเชื่อมโยงของ NCTM ต้องการให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆภายในวิชาคณิตศาสตร์ เข้าใจถึงความเกี่ยวข้องของความรู้ที่เชื่อมโยงถึงกันได้ ในวิชาคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และเห็นถึงการเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่างๆในชีวิตประจำวันได้

2.4 ทิศทางของคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics) (NCTM, 2000: 360) ได้กล่าวถึงทิศทางของคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษาไว้ว่า จะต้องเป็น

- 1) การเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ
- 2) การใช้ปัญหาในชีวิตจริงเป็นเนื้อหาในการพัฒนาวิชาคณิตศาสตร์
- 3) การเชื่อมโยงภายในวิชาคณิตศาสตร์กับหัวข้อที่เกี่ยวข้องกัน ที่แตกต่างจากการสอนแบบเดิม

4) การเชื่อมโยงที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาใหม่ในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นทฤษฎีโกลวน (Chaos Theory)

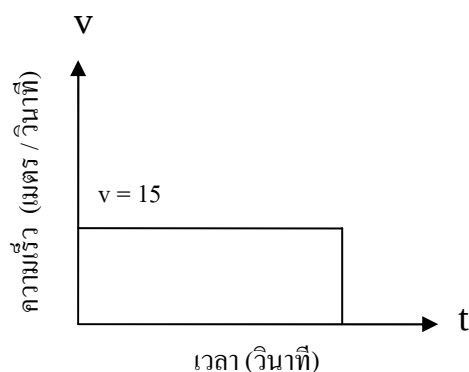
5) การพัฒนาและเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ตามสภาพจริงผ่านการเชื่อมโยง มากกว่าที่จะแสดงวิธีการแก้ปัญหาย่างง่าย ๆ

กล่าวโดยสรุป ทิศทางของคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษามุ่งให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆภายในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ และเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

2.5 การเชื่อมโยงในลักษณะต่างๆ

1) การเชื่อมโยงภายในวิชาคณิตศาสตร์

หัวข้อต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์นั้นแม้ว่าจะมีความเกี่ยวพันกัน แต่นักเรียนส่วนใหญ่มักสับสนในการหาว่าหัวข้อที่เรียนในแต่ละขอบเขตเนื้อหานั้นสามารถนำไปใช้ทำความเข้าใจในขอบเขตอื่นๆ ซึ่งบทบาทสำคัญของครูในการสอนคณิตศาสตร์คือ การช่วยให้นักเรียนสามารถมองเห็นการบูรณาการของหัวข้อต่างๆได้ทั้งหมด นักเรียนที่มีความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างหัวข้อต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์ได้จะมีความเข้าใจที่ลึกซึ้ง และนำมาซึ่งความประทับใจต่อคณิตศาสตร์ (Buck, 2000: 591-594) ไครส์ (Crites, 1995: 292-297) ได้ยกตัวอย่างความเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต ที่นำมาใช้อธิบายเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และเวลา ซึ่งเรขาคณิตจะทำให้นักเรียนมีแนวทางใหม่ในการอธิบายด้วยการแสดงความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระยะทาง ความเร็ว และเวลา ในลักษณะของรูปภาพ ในขณะที่พีชคณิตทำให้นักเรียนได้แสดงความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และเวลา ในรูปของสมการ ตัวอย่างเช่น ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ 15 เมตรต่อวินาที ถ้าความเร็วของวัตถุแทนด้วย v เวลาแทนด้วย t และระยะทางแทนด้วย s กราฟที่นำเสนอมีลักษณะดังภาพประกอบ

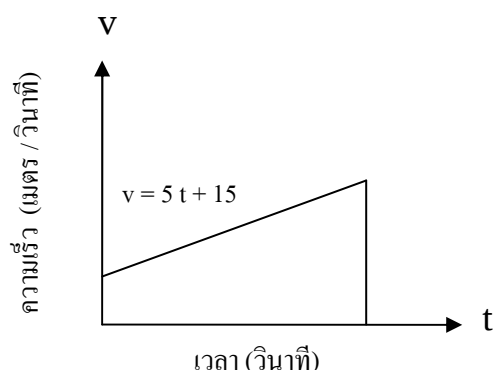


ระยะทางเท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และ เวลา เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

จากภาพประกอบ 1 สามารถอธิบายระยะทางของวัตถุในเชิงเรขาคณิตได้ ด้วยการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม และสามารถอธิบายระยะทางของวัตถุในเชิงพีชคณิตด้วยสมการ $s = vt$ เมื่อเวลาผ่านไป 9 วินาที ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้คือ $(15)(9) = 135$ เมตร ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ โดยเริ่มที่ความเร็ว $5t + 15$ เมตรต่อวินาที เมื่อเวลาผ่านไป 9 วินาที สามารถหาระยะทางในเชิงพีชคณิตโดยใช้สูตร $s = \left(\frac{1}{2}\right)t(v_1 + v_2)$ เมื่อ v_1 แทนความเร็วต้น และ v_2 แทนความเร็วปลาย ดังนั้น $v_1 = 5(0) + 15 = 15$ เมตร/วินาที และ $v_2 = 5(9) + 15 = 60$ เมตร/วินาที ซึ่งจะได้ระยะทางเท่ากับ $\left(\frac{1}{2}\right)(9)(15 + 60) = 337.5$ เมตร กราฟแสดง

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และ เวลา มีลักษณะดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และ เวลา เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่

จากภาพประกอบ 2 แสดงให้เห็นว่าการแปลงระยะทางให้อยู่ในรูปของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นสิ่งสำคัญ เมื่อสามารถแปลงให้อยู่ในรูปสูตรทั่วไป โดยให้ความเร่งเริ่มต้นที่ความเร็ว $at + b$ เมตรต่อวินาที เมื่อ a และ b เป็นตัวคงที่ หลังจากเวลาผ่านไป t วินาที ระยะทาง $s = \left(\frac{1}{2}\right)t(b + (at + b)) = \left(\frac{1}{2}\right)t(at + 2b) = \left(\frac{1}{2}\right)at^2 + bt$ ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว ระยะทางสามารถอธิบายในเชิงพีชคณิตได้ด้วยสมการกำลังสองของเวลา ผลลัพธ์อยู่ในรูปกราฟพาราโบลา

จากตัวอย่างที่กล่าวมา แสดงให้เห็นถึงความสำคัญที่ครูควรเน้นความเชื่อมโยงของหัวข้อต่างๆ ที่มีอยู่ในคณิตศาสตร์ ซึ่งครูควรติดตามประวัติของการพัฒนาคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ในปัจจุบัน ควบคู่กับปูพื้นฐานความคิดรวบยอดที่จะส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียนในอนาคต

2) การเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น

การเรียนการสอนในโรงเรียนนั้นแสดงให้เห็นว่าโลกถูกแบ่งออกเป็นวิชาต่างๆ แต่ในความเป็นจริงชีวิตประกอบขึ้นจากส่วนต่างๆ มากมายและเชื่อมโยงกัน ดังนั้นเมื่อโรงเรียนแบ่งประสบการณ์ออกเป็นวิชาต่างๆ นักเรียนจึงเริ่มมีความรู้สึกละเลยและไม่มีความเชื่อต่อคณิตศาสตร์ในทางลบ ดังนั้นเพื่อให้การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นที่น่าสนใจของนักเรียน ครูจึงควรมีบทบาทสำคัญในการช่วยให้นักเรียนสามารถมองเห็นความเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่นๆ ที่เรียนในโรงเรียน เช่นที่ บาลาส (Balas, 2002: Online) ได้กล่าวถึงความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับการอ่านว่า ตัวอักษร สัญลักษณ์ และจำนวน เป็นวิธีเริ่มแรกในการสื่อสารในโลกซึ่งทำให้เกิดการเชื่อมโยงโดยธรรมชาติในการผสมผสานระหว่างการอ่านและคณิตศาสตร์ในหลักสูตรของโรงเรียน การอ่านตัวอักษรในรูปของคำเป็นวัตถุเชิงสัญลักษณ์เป็นการอ้างเหตุผลและการกระทำ ซึ่งในคณิตศาสตร์คือ สัญลักษณ์ที่เป็นจำนวน รูปแบบหรือความสัมพันธ์ การแสดงออกทั้งในลักษณะของคำและจำนวนเป็นพื้นฐานในการประมวลข้อมูลต่างๆ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics, 1989; อ้างอิงมาจาก Balas, 2002: Online) กล่าวถึงการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับการอ่านว่า ในระดับอนุบาล ถึงเกรด 4 คณิตศาสตร์สามารถคิดโดยผ่านภาษานักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย ครูสามารถช่วยด้วยการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สื่อสารและพูดคุยเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ (Talk Math) กับเพื่อนๆ นอกจากนั้นแล้วนักเรียนสามารถใช้การเชื่อมโยงในการสร้างความรู้ เรียนรู้แนวทางใหม่ๆ เพื่อที่จะคิดเกี่ยวกับแนวคิด ความชัดเจนของการคิด และการสื่อสารเกี่ยวกับปัญหา ในระดับเกรด 5 ถึง เกรด 8 ความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับการอ่านคือ นักเรียนใช้ทักษะการอ่าน การฟัง และการมองดู ในการแปลความและประเมินแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ส่วนในระดับเกรด 9 ถึง 12

นักเรียนสามารถใช้ทักษะต่างๆ เพื่อแปลความหมายของข้อมูลและสถิติต่างๆ ในการพิจารณาประเด็นทางสังคม นอกจากนั้นแล้ว การอ่านหนังสือเรียน อ่านหนังสือโฆษณาหรือหัวข้อในหนังสือพิมพ์ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมรับรู้และแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับข้อมูล การอ่านสามารถเตรียมข้อมูลสำหรับให้นักเรียนประยุกต์ใช้ในทักษะทางคณิตศาสตร์ นักเรียนที่เป็นผู้รู้คณิตศาสตร์บางครั้งก็เป็นผู้รู้การอ่านด้วย คณิตศาสตร์เป็นมากกว่าตัวเลขในขณะที่การอ่านเป็นมากกว่าตัวอักษรด้วย การเป็นผู้รู้หมายถึงการจัดวางจำนวนไปสู่บริบททางสังคมอย่างมีความหมายในชีวิตประจำวัน

มาร์ควิทซ์ (Malkevitch, 2003: Online) กล่าวถึงความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศิลปะว่า เป็นที่น่าประหลาดใจว่ามีความเกี่ยวพันกันอย่างมากมายระหว่างคณิตศาสตร์กับศิลปะสาขาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นดนตรี การเต้นรำ การวาดภาพ สถาปัตยกรรม และการปั้น จนถือได้ว่าคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือของศิลปะ ศิลปินใช้การรับรู้หรือการรับรู้เชิงเส้นตรงมาเพิ่มความสมจริงสมจังในการนำเสนอของพวกเขา ซึ่งการรับรู้เชิงเส้นตรงเป็นสาขาหนึ่งของเรขาคณิตที่รู้จักกันในชื่อของ Descriptive Geometry ที่กล่าวเกี่ยวกับการนำเสนอวัตถุ 3 มิติในลักษณะ 2 มิติ การนำเสนอวัตถุ 2 มิติบนกระดาษหรือจอคอมพิวเตอร์ เป็นเทคนิคที่สำคัญมากในทางวิศวกรรม สถาปัตยกรรม และ นักออกแบบ เช่น ในการออกแบบยานอวกาศลำหนึ่งนั้นต้องใช้รูปวาดจำนวนนับหมื่นรูป ซึ่ง Descriptive Geometry จะช่วยศิลปิน นักออกแบบ วิศวกร หรือสถาปนิก ในการนำเสนอวัตถุ 3 มิติบนพื้นราบ

3) การเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

จากการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของนักเรียนของไคล์และคณะ (Kyle; et al. 2001: 80-86) โดยนำข้อมูลที่ได้จากการเข้าไปเยี่ยมชมครอบครัวของนักเรียน เพื่อศึกษารูปแบบของสิ่งที่ครอบครัวของนักเรียนสนใจและทักษะการปฏิบัติของแต่ละครอบครัวซึ่งเกี่ยวกับขั้นตอนการทำเกษตร การเลี้ยงสัตว์ การฝีมือ การดูทีวี การทำอาหาร หลังจากนั้น ได้นำข้อมูลที่ได้มาพัฒนาเป็นปัญหาที่มีความหลากหลายและมีขั้นตอนในการแก้ปัญหาหลายขั้นตอน เช่น

รายการอาหาร	เนยที่ต้องใช้
Sugar Cookies	$\frac{1}{4}$ ถ้วย
Hermit Cookies	1 ถ้วย
No-bake Cookies	$\frac{1}{2}$ ถ้วย
Hula Cake Icing	$\frac{1}{2}$ ถ้วย
Fruit Crunt	$\frac{1}{2}$ ถ้วย
- ถ้าต้องการทำอาหารทุกอย่างนักเรียนต้องใช้เนยเท่าไร - ถ้ามีเนยเพียง $1\frac{1}{2}$ ถ้วย นักเรียนจะทำอาหารชนิดใดบ้าง ให้นักเรียนแสดงรายการอาหารที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด	

ภาพประกอบ 3 ภาพแสดงอัตราส่วนของเนยที่ใช้ในรายการอาหาร

หลังจากนั้นให้นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม พบว่า การให้นักเรียนได้ทำงานที่มีความหมาย การให้แก้ปัญหาในสถานการณ์จริง เป็นแนวทางที่ดีที่สุดในการส่งเสริมความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน และนักเรียนจะได้รับการส่งเสริมอย่างสุดความสามารถถ้าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้นได้เชื่อมโยงเข้ากับความเป็นส่วนตัวของพวกเขา ความรู้และทักษะที่ครอบครัวยุติสนใจ นักเรียนจะชอบแก้ปัญหาและสนุกสนานกับการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ถ้าเป็นปัญหาที่มีความหมายและเกี่ยวข้องกับพวกเขา นอกจากนี้แล้วผู้ปกครองของนักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น จากที่เคยคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องยาก และช่วยให้ครูผู้สอนสามารถนำความรู้ที่บ้านของนักเรียนมาช่วยส่งเสริมการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้ดีขึ้น

กล่าวโดยสรุป การเชื่อมโยงมี 3 ลักษณะ ได้แก่ การเชื่อมโยงภายในวิชาคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการเชื่อมโยงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

2.6 การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง

กระทรวงศึกษาธิการ (2545: 200-205) กล่าวว่า องค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมการพัฒนาการเรียนรู้ทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยง มีดังนี้

- 1) มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อย่างเด่นชัดในเรื่องนั้น

- 2) มีความรู้ในเนื้อหาที่จะนำไปเชื่อมโยงกับสถานการณ์หรืองานอื่นๆที่ต้องการเป็นอย่างดี
- 3) มีทักษะในการมองเห็นความเกี่ยวข้องเชื่อมโยง ระหว่างความรู้และทักษะ/กระบวนการที่มีในเนื้อหานั้นกับงานที่เกี่ยวข้องด้วย
- 4) มีทักษะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างความสัมพันธ์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆหรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องด้วย
- 5) มีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่หาได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้นอย่างสมเหตุสมผล

ในการจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์นั้น ผู้สอนอาจจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ปัญหาสอดแทรกในการเรียนรู้อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนได้นำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ หรือนำความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนกำหนดขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือเห็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์กับชีวิตประจำวัน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีการปฏิบัติจริง และมีทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงนี้ ผู้สอนอาจมอบหมายงานหรือกิจกรรมให้ผู้เรียนไปศึกษาค้นคว้าหาความรู้ที่เกี่ยวข้องกับกิจกรรมนั้น แล้วนำเสนองานต่อผู้สอนและผู้เรียน ให้มีการอภิปรายและหาข้อสรุปร่วมกัน และในการจัดการเรียนรู้ที่ต้องการให้ผู้เรียนมีการพัฒนาการเรียนรู้ ผู้สอนควรจัดกิจกรรม หรือให้ปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิด สามารถบอกแนวคิดและแสดงเหตุผลได้ ผู้สอนไม่ควรดูแลเฉพาะคำตอบที่หาได้จากการคำนวณเท่านั้น คำตอบของปัญหาอาจมีมากกว่า 1 คำตอบ ขึ้นอยู่กับการให้เหตุผลประกอบที่สมเหตุสมผลด้วย

กล่าวโดยสรุป ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงนั้น ครูควรบูรณาการเนื้อหาต่างๆภายในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เชื่อมโยงวิชาคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ รวมถึงการนำวิชาคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับชีวิตความเป็นอยู่ประจำวัน นอกจากนี้ครูยังควรจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ปัญหาที่ให้นักเรียนได้ปฏิบัติจริง เพื่อที่จะได้นำความรู้ เนื้อหาสาระ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปใช้เรียนรู้เนื้อหาใหม่ หรือนำมาแก้ปัญหาสถานการณ์ที่ครูกำหนดขึ้น

2.7 แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง

สมาคมครุศาสตรแห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 354-358) กล่าวว่า นักเรียนเกรด 9 - 12 ควรได้รับการพัฒนาในเรื่องของการเชื่อมโยงความคิดไปยังแง่มุมต่างๆ ทำให้เกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งขึ้น ดีกว่าคิดถึงวิธีการเดียวในการแก้ปัญหาที่นำไปสู่ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน นักเรียนจะได้การหยั่งรู้ที่สามารถบอกได้ว่าปัญหาใดต้องพิสูจน์ หรือปัญหาใดใช้เพียงการคาดคะเน ไม่ต้องพิสูจน์ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันทำให้เกิดความเข้าใจในปัญหานั้นมากยิ่งขึ้น

หลักการที่จำเป็นอันหนึ่งในการช่วยให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยง คือ กระตุ้นให้นักเรียนแสวงหาความรู้บวกกับการได้แก้ปัญหาที่ใกล้ตัว อาจารย์โรบินสันเริ่มต้นด้วยปัญหาที่มีทางแก้หลายวิธีและหลากหลายคำตอบ ในขณะที่ทำงานกับปัญหานักเรียนอาจถูกชักนำให้ไขว่เขวจนทำให้ไม่สามารถตัดสินใจได้และเกิดการโต้แย้ง เขาจะช่วยให้นักเรียนค้นหาแก่นแท้ที่นำมาซึ่งความคิดใหม่ๆ ที่สร้างการเชื่อมโยง นักเรียนจะได้รับการส่งเสริมให้สะท้อนความคิดและเปรียบเทียบคำตอบที่ได้ เป็นการสร้างทักษะการเชื่อมโยง เมื่อนักเรียนทำทุกอย่างกับปัญหาที่ให้มาได้แล้ว จึงก้าวไปสู่การค้นหาคำตอบทั่วไป ปัญหาที่มีคุณค่าจะทำให้เกิดความคิดทางคณิตศาสตร์และเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนสามารถเห็นคณิตศาสตร์ได้เชื่อมโยงกันหมด

กล่าวโดยสรุป แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงคือ ครูควรใช้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่บูรณาการความรู้ มีวิธีคิดหรือคำตอบที่หลากหลาย เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ที่มีอยู่ค้นหาคำตอบและเห็นถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

2.8 เทคโนโลยีเพื่อการเรียนการสอน

เทคโนโลยีเพื่อการศึกษา (Technology in Education) หมายถึง การนำเทคโนโลยีด้านต่างๆ เข้ามาประยุกต์ใช้เพื่อประโยชน์ในการจัดการศึกษาให้มีประสิทธิภาพ เทคโนโลยีที่นำมาใช้เพื่อการศึกษา ได้แก่ เทคโนโลยีต่าง ๆ ดังนี้ (ชม ภูมิภาค, 2543: 15-17)

- 1) เทคโนโลยีสื่อสารโทรคมนาคม คือ เทคโนโลยีเกี่ยวกับการสื่อสารทางไกล โดยผ่านระบบการสื่อสารคมนาคมต่าง ๆ
- 2) เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ ซึ่งใช้คอมพิวเตอร์ในการรับข้อมูล ประมวลผลข้อมูล และนำเสนอข้อมูลตามที่ผู้ใช้องการ
- 3) เทคโนโลยีเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ซึ่งแบ่งเป็นประเภทใหญ่ ๆ ได้แก่ เครือข่ายเฉพาะที่ (Local Area Network-LAN) เป็นระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ขนาดเล็กที่ต่อเชื่อม

คอมพิวเตอร์กับอุปกรณ์ไม่มากนัก มักอยู่ในอาคารหลังเดียว เครือข่ายบริเวณกว้าง (Wide Area Network-WAN) เป็นระบบเครือข่ายที่มีคอมพิวเตอร์กระจายอย่างกว้างขวางทั่วประเทศ ช่วยให้สำนักงานในจังหวัดติดต่อสื่อสารและทำงานร่วมกับสำนักงานใหญ่ที่อยู่ในเมืองหลวงได้

4) ระบบสำนักงานอัตโนมัติ เป็นแนวคิดที่นำระบบเครือข่ายมาใช้เชื่อมโยงคอมพิวเตอร์กับอุปกรณ์สำนักงาน เช่น ระบบไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ ระบบประชุมทางไกล

5) เทคโนโลยีระบบสารสนเทศ เป็นการประมวลผลข้อมูลในลักษณะต่าง ๆ เพื่อช่วยในการจัดการและบริหารงาน

6) ระบบมัลติมีเดีย เป็นเทคโนโลยีที่ผสมผสานภาพ ภาพเคลื่อนไหว เสียง และข้อความเข้าด้วยกันโดยใช้ระบบคอมพิวเตอร์ช่วยในการแสดงผล นำไปประยุกต์ใช้ในการสอน เช่น คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) กิจกรรมเพื่อการศึกษาที่ใช้เทคโนโลยีเข้ามาช่วย ในปัจจุบันนี้ได้แก่ วิทยุกระจายเสียงเพื่อการศึกษา วิทยุโรงเรียน โทรทัศน์เพื่อการศึกษา การสอนทางไกลผ่านดาวเทียม ระบบประชุมทางไกล ระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เช่น เครือข่ายอินเทอร์เน็ต

กล่าวโดยสรุป เทคโนโลยีเพื่อการเรียนการสอน มีด้วยกัน 6 ประเภท ได้แก่ เทคโนโลยีสื่อสารโทรคมนาคม เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ เทคโนโลยีเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ระบบสำนักงานอัตโนมัติ เทคโนโลยีระบบสารสนเทศ และระบบมัลติมีเดีย ดังนั้นครูผู้สอนเองจำเป็นต้องเลือกเทคโนโลยีให้เหมาะสมกับการเรียนการสอน

2.9 เทคโนโลยีของเว็บไซต์

สุวัฒน์ ปุณณชัยยะ และคณะ (2545) กล่าวว่า ในปัจจุบันนี้เทคโนโลยีของเว็บไซต์ได้มีการพัฒนาเพิ่มมากขึ้น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

เว็บเบราว์เซอร์ (Web Browser)

เมื่อเว็บเพจเป็นสื่อในการนำเสนอข้อมูลที่ได้รับ ความสนใจมาก การเรียนรู้เทคโนโลยีด้านนี้ เพื่อนำมาพัฒนาเว็บเพจด้วยตนเอง จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจ ทั้งนี้การพัฒนาเว็บเพจ จะต้องอาศัยภาษาคอมพิวเตอร์ภาษาหนึ่ง ซึ่งพัฒนาขึ้นมาเฉพาะ ปัจจุบันมีให้เลือกใช้หลากหลายภาษา อย่างไรก็ตามภาษาคอมพิวเตอร์สำหรับการพัฒนาเว็บเพจ ที่นิยมกันอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะสำหรับนักพัฒนาเว็บระดับเริ่มต้น ได้แก่ ภาษาที่เรียกว่า HTML และสามารถดูเว็บที่พัฒนาแล้ว ด้วยโปรแกรมเบราว์เซอร์ (Web Browser) ปัจจุบันมีผู้ผลิตโปรแกรมเบราว์เซอร์ออกมาเผยแพร่และจำหน่ายหลายราย

โปรแกรมเบราว์เซอร์ตัวแรกได้แก่ Mosaic ซึ่งพัฒนาโดยทีมงานจาก NCSA (National Center for Supercomputing Application) มหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ ประเทศสหรัฐอเมริกา เป็น

โปรแกรมที่ทำหน้าที่แปลคำสั่ง และข้อมูลที่อยู่ในรูปของภาษา HTML ให้เป็นรูปแบบที่น่าสนใจบนจอคอมพิวเตอร์ การพัฒนาเว็บไซต์จำเป็นต้องศึกษาถึงคุณสมบัติของเว็บเบราว์เซอร์แต่ละตัวเนื่องจากมีคุณสมบัติในการแสดงผลเอกสารเว็บแตกต่างกันไป

Markup Language

Markup Language หรือภาษากำกับ เป็นภาษาที่นิยมใช้ในการพัฒนาเอกสารเว็บ ภาษากำกับจะมีลักษณะโครงสร้างคือ พิมพ์ในเครื่องหมาย < > และมีการเปิด/ปิดคำสั่ง เพื่อระบุตำแหน่งเริ่มต้นคำสั่ง และตำแหน่งสุดท้ายของคำสั่ง ภาษากำกับที่รู้จักกันดีในการพัฒนาเว็บ ก็คือภาษา HTML ในปัจจุบันการพัฒนาใช้ภาษากำกับหลายลักษณะ นอกเหนือ HTML คือ ภาษา XHTML (eXtensible HTML), XML (eXtensible Markup Language), MathML (Math Markup Language)

ภาษา HTML

HTML หรือ Hyper Text Markup Language เป็นภาษาคอมพิวเตอร์รูปแบบหนึ่ง ที่มีลักษณะเป็นภาษาในเชิงการบรรยายเอกสารไฮเปอร์มีเดีย (Hypermedia Document Description Language) เพื่อนำเสนอเอกสารนั้นเผยแพร่ในระบบเครือข่าย WWW (World Wide Web) มีโครงสร้างการเขียนที่อาศัยตัวกำกับ เรียกว่า แท็ก (Tag) ควบคุมการแสดงผลของข้อความ, รูปภาพ หรือวัตถุอื่นๆ ผ่านโปรแกรมเบราว์เซอร์ (Browser)

HTML มีพัฒนาจากภาษา SGML (Standardized General Markup Language) โดยนำมาปรับปรุงให้ใช้งานได้ง่ายขึ้น สะดวกกว่า SGML พัฒนามาเรื่อยๆ จาก HTML 2 จนถึง 4.01 ในปัจจุบัน รายละเอียดการพัฒนาภาษา HTML สามารถศึกษาได้จาก <http://www.w3.org>

ภาษา SGML

SGML (Standardized Markup Language) เป็นภาษาต้นแบบของภาษา Markup ทั้งหมด แต่มีความยุ่งยากในการนำไปประยุกต์ใช้งาน การจัดเก็บข้อมูล ความยืดหยุ่นและลักษณะเฉพาะที่เกินความต้องการ ทำให้ยากต่อการเขียนโปรแกรม

ภาษา XML

XML ถูกกำหนดโดยกลุ่มทำงาน XML ของ W3C (World Wide Web Consortium) เป็นเซตย่อยของ SGML ทำให้ง่ายต่อการใช้งาน และปรับให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น คือผู้ใช้สามารถสร้างคำสั่งได้เอง ลดทอนไวยากรณ์ต่างๆ ลงได้ XML จะทำให้การจัดการข้อมูลหรือเรียกใช้ข้อมูลจากแอปพลิเคชันต่างๆ เข้าสู่มาตรฐานเดียวกัน

กล่าวโดยสรุปเทคโนโลยีของเว็บไซต์ในปัจจุบันมีมากมาย ขึ้นอยู่กับประเภทของการนำไปใช้งานและขึ้นอยู่กับระบบปฏิบัติการของเครื่องแม่ข่ายที่ติดตั้งเทคโนโลยี ดังนั้นการที่จะพัฒนาห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) จำเป็นที่จะต้องศึกษาความเป็นไปได้ของเทคโนโลยีกับเครื่องแม่ข่ายที่จะทำการติดตั้งด้วย

2.10 การจัดการข้อมูล

โอภาส เอี่ยมสิริวงศ์ (2548: 15-20) ได้กล่าวว่า การจัดการข้อมูลเป็นการบันทึกข้อมูล ซึ่งอาจเป็นการบันทึกข้อมูลลงในกระดาษ สมุด เพื่อช่วยในการจำ หากต้องการเรียกดูข้อมูลที่เคยบันทึกไว้ ก็จะพลิกหน้าหนังสือไปยังเลขหน้าที่ต้องการเพื่อดูรายละเอียดข้อมูลที่ต้องการบันทึกนั้น

ต่อมาได้มีการพัฒนารูปแบบการจัดการข้อมูลให้มีระบบระเบียบมากขึ้น มีการบันทึกข้อมูลลงในแฟ้มเอกสารต่างๆ จัดเป็นหมวดหมู่มีการจัดทำสารบัญและจำเป็นต้องมีอุปกรณ์หรือเครื่องมือที่ใช้ในการจัดเก็บแฟ้มเอกสารเหล่านั้นเพื่อให้เกิดความปลอดภัยยิ่งขึ้น

หลังจากเห็นความจำเป็นของการเก็บข้อมูลแล้วต่อมาได้มีการนำเครื่องคอมพิวเตอร์ใช้ในการจัดเก็บข้อมูล ซึ่งสามารถช่วยได้มากในกรณีที่ข้อมูลมีปริมาณมาก กล่าวคือสามารถจัดเก็บข้อมูลได้จำนวนมากมายมหาศาล เพียงบันทึกลงในสื่อบันทึกข้อมูล เช่น ดิสก์ ฮาร์ดดิสก์ ซีดีรอม หรือเทป และต้องเข้าใจว่าในการนำคอมพิวเตอร์มาเป็นเครื่องมือการประมวลผลข้อมูลนั้น จะไม่สามารถดำเนินการใดๆ ได้เลยหากปราศจากข้อมูล ข้อมูลที่จัดเก็บจะจัดเก็บเป็นแฟ้มข้อมูลเพื่อให้คอมพิวเตอร์สามารถอ่านข้อมูลจากแฟ้มนั้นได้

กล่าวโดยสรุป ในการจัดการเรียนการสอนที่มีการประยุกต์ใช้เครื่องมือด้านสารสนเทศและมีการเชื่อมต่อผ่านระบบอินเทอร์เน็ตนั้นมีความจำเป็นอย่างมาก ที่ต้องมีระบบบริหารจัดการข้อมูลที่ใช้ในการเรียนการสอนที่ดี เพื่อที่สามารถบันทึกเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ ภาววิดีโอ ที่ใช้ในการเรียนการสอน รวมถึงมีการเก็บบันทึกกระแสดูต่างๆ ที่เป็นข้อสงสัยในเนื้อหาที่ได้เรียนจากนักเรียน เพื่อที่ผู้สอนเองสามารถเข้ามาตอบคำถามหรือข้อสงสัยภายหลังได้

2.11 การจัดห้องเรียนเสมือนจริง

การเรียนการสอนที่จำลองแบบเสมือนจริง เป็นนวัตกรรมทางการศึกษาที่สถาบันการศึกษาต่างๆ ทั่วโลก กำลังให้ความสนใจและจะขยายตัวมากขึ้นในศตวรรษที่ 21 การเรียนการสอนในระบบนี้อาศัยสื่ออิเล็กทรอนิกส์ โทรคมนาคม และเครือข่ายคอมพิวเตอร์เป็นหลัก ที่เรียกว่า Virtual Classroom หรือ Virtual Campus นับว่าเป็นการพัฒนาของการบริการการศึกษาทางไกล ซึ่งเป็นรูปแบบใหม่ของสถาบันการศึกษาในโลกยุคไร้พรมแดน

ได้มีผู้ให้ความหมายของห้องเรียนเสมือนจริงไว้หลายท่าน ดังนี้

ครรชิต มัลย์วงศ์ ได้กล่าวถึงความหมายของห้องเรียนเสมือน(Virtual Classroom) ว่า หมายถึง การเรียนการสอนที่ผ่านระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมโยงคอมพิวเตอร์ของผู้เรียนเข้าไว้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้ให้บริการเครือข่าย (File Server) และเครื่องคอมพิวเตอร์ผู้ให้บริการเว็บ (Web Server) อาจเป็นการเชื่อมโยงระยะใกล้หรือระยะไกล ผ่านทางระบบการสื่อสารและอินเทอร์เน็ต ผู้สอนจะออกแบบระบบการเรียนการสอนไว้โดยกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน สื่อต่างๆ นำเสนอผ่านเว็บไซต์ประจำวิชา จัดสร้างเว็บเพจในแต่ละส่วนให้สมบูรณ์ ผู้เรียนจะเข้าสู่เว็บไซต์ประจำวิชาและดำเนินการเรียนไปตามระบบการเรียนที่ผู้สอนออกแบบไว้ ในระบบเครือข่ายมีการจำลองสภาพแวดล้อมต่างๆในลักษณะเป็นห้องเรียนเสมือน (ครรชิต มัลย์วงศ์. 2540)

รุจโรจน์ แก้วอุไร กล่าวไว้ว่าห้องเรียนเสมือน (Virtual Classroom) เป็นการจัดการเรียนการสอนทางไกลเต็มรูปแบบ โดยมีองค์ประกอบครบ ได้แก่ ตัวผู้เรียน ผู้สอน และเพื่อนร่วมชั้น เข้าสู่กระบวนการเรียนการสอนพร้อมๆ กัน มีสื่อการสอนทั้งภาพและเสียง ผู้เรียนสามารถร่วมกิจกรรมกลุ่มหรือตอบโต้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้สอนหรือกับเพื่อนร่วมชั้นได้เต็มที่ (คล้ายกับ Chat room) ส่วนผู้สอนสามารถตั้งโปรแกรมติดตามพัฒนาการ ประเมินผลการเรียนรวมทั้งประสิทธิภาพของหลักสูตรได้ ทั้งนี้ไม่จำกัดเรื่องสถานที่ แต่ผู้เรียนในชั้นและผู้สอนจะต้องนัดเวลาเรียนอย่างพร้อมเพรียง (รุจโรจน์ แก้วอุไร. 2543)

บุญเกื้อ คอรวาเวช ได้กล่าวถึงห้องเรียนเสมือน (Virtual Classroom) ว่า หมายถึง การจัดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนจะเรียนที่ไหนก็ได้ เช่น ที่บ้าน ที่ทำงาน โดยไม่ต้องไปนั่งเรียนในห้องเรียนจริงๆ ทำให้ประหยัดเวลา ค่าเดินทาง และค่าใช้จ่ายอื่นๆ อีกมากมาย (บุญเกื้อ คอรวาเวช. 2542)

มนตรี ดวงจิโน (2554: 3-44) การจัดการเรียนการสอนจำลองแบบที่เสมือนจริง เป็นนวัตกรรมทางการศึกษาที่สถาบันการศึกษาต่างๆทั่วโลกกำลังให้ความสนใจ และจะขยายตัวมากขึ้น ในศตวรรษที่ 21 การเรียนการสอนในระบบนี้อาศัยสื่ออิเล็กทรอนิกส์โทรคมนาคมและเครือข่ายคอมพิวเตอร์เป็นหลัก ที่เรียกว่า Virtual Classroom หรือ Virtual Campus จนกระทั่งเรียกว่า Virtual University ก็มี นับว่าเป็นการพัฒนาการบริหารศึกษาทางไกลรูปแบบใหม่ของสถาบันการศึกษาในโลกยุคไร้พรมแดน กล่าวคือ ผู้เรียนเรียนที่ไหนก็ได้ จะเป็นที่บ้าน หรือที่ทำงาน โดยไม่ต้องไปนั่งเรียนในห้องเรียนจริงๆ ทำให้ประหยัดเวลา ค่าเดินทาง และค่าใช้จ่ายอื่นๆ ได้มาก

กล่าวโดยสรุป ห้องเรียนเสมือน (Virtual Classroom) หมายถึง การเรียนการสอนที่กระทำผ่านระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมโยงคอมพิวเตอร์ของผู้เรียนเข้ากับเครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้ให้บริการเครือข่าย (File Server) และคอมพิวเตอร์ผู้ให้บริการเว็บ (Web server) เพื่อให้เกิดการเรียนการสอน มีการกำหนดตารางเวลาหรือตารางสอน เข้าสู่กระบวนการเรียนการสอนพร้อมๆ กันหรือไม่พร้อมกัน มีการใช้สื่อการสอนทั้งภาพและเสียง ผู้เรียนสามารถร่วมกิจกรรมกลุ่มหรือตอบโต้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้สอนหรือกับเพื่อนร่วมชั้นได้เต็มที่ (Chat room) ส่วนผู้สอนสามารถตั้งโปรแกรมติดตามพัฒนาการประเมินผลการเรียนรวมทั้งประสิทธิภาพของหลักสูตรได้ ทั้งนี้ ไม่จำกัดเรื่องสถานที่และเวลา (Any Where & Any Time) ของผู้เรียนและผู้สอน

2.12 ประเภทของห้องเรียนเสมือนจริง

อุทัย ภิรมย์รัตน์ (2540) ได้จำแนกประเภทการเรียนในห้องเรียนแบบเสมือนจริงได้ 2 ลักษณะ คือ

1) จัดการเรียนการสอนในห้องเรียนธรรมดา แต่มีการถ่ายทอดสดภาพและเสียงเกี่ยวกับบทเรียน โดยอาศัยระบบโทรคมนาคมและเครือข่ายคอมพิวเตอร์ไปยังผู้เรียนที่อยู่นอกห้องเรียน ผู้เรียนก็สามารถรับฟังและติดตามการสอนของผู้สอนได้จากเครื่องคอมพิวเตอร์ของตนเอง อีกทั้งยังสามารถโต้ตอบกับอาจารย์ผู้สอนหรือเพื่อนร่วมชั้นเรียนได้ ห้องเรียนแบบนี้ยังอาศัยสิ่งแวดล้อมทางกายภาพที่เป็นจริง ซึ่งเรียกว่า Physical Education Environment

2) การจัดห้องเรียนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างภาพเสมือนจริง เรียกว่า Virtual Reality โดยใช้สื่อที่เป็นตัวหนังสือ (Text-Based) หรือภาพกราฟิก (Graphical-Based) ส่งบทเรียนไปยังผู้เรียนโดยผ่านระบบโทรคมนาคมและเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ห้องเรียนลักษณะนี้เรียกว่า Virtual Education Environment ซึ่งเป็น Virtual Classroom ที่แท้จริง การจัดการเรียนการสอนทางไกลทั้งสองลักษณะนี้ ในบางมหาวิทยาลัยก็ใช้ร่วมกัน คือมีทั้งแบบที่เป็นห้องเรียนจริงและห้องเรียนเสมือนจริง การเรียนการสอนก็จะผ่านทางเครือข่ายคอมพิวเตอร์ที่เชื่อมโยงกันอยู่ทั่วโลก เช่น Internet, WWW. ขณะนี้ได้มีผู้พยายามจัดตั้งมหาวิทยาลัยเสมือนจริงขึ้นแล้ว โดยเชื่อมโยง Web site ต่างๆ ที่ให้บริการด้านการเรียนการสอนทางไกล แบบ Virtual Classroom ต่างๆ เข้าด้วยกัน และจัดบริเวณอาคารสถานที่ ห้องเรียน ห้องสมุด ภาควิชาต่างๆ ศูนย์บริการต่างๆ ตลอดจนคณาจารย์ นักศึกษา กิจกรรมทุกอย่างเสมือนเป็นชุมชนวิชาการจริงๆ แต่ข้อมูลเหล่านี้จะอยู่ที่ศูนย์คอมพิวเตอร์ของแต่ละแห่ง ผู้ประสงค์จะเข้าร่วมในการเปิดบริการก็จะต้องจองเนื้อที่และเขียน

โปรแกรมใส่ข้อมูลเข้าไป เมื่อนักศึกษาติดต่อเข้ามา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ก็จะแสดงภาพ เสียง ภาพเคลื่อนไหว และสามารถโต้ตอบได้เสมือนหนึ่งเป็นมหาวิทยาลัยจริง ๆ

กล่าวโดยสรุป เราสามารถทำการจำแนกประเภทของห้องเรียนเสมือนจริงได้ 2 ประเภทคือ การเรียนการสอนโดยผ่านห้องเรียนจริง และการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการจำลองห้องเรียนเสมือนจริง ทั้งนี้ผู้สอนหรือบุคลากรในสถาบันการศึกษา ครูอาจารย์ ในปัจจุบันจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องฝึกทักษะการเรียนการสอนทั้งสองรูปแบบ ทั้งห้องเรียนจริงและห้องเรียนเสมือนจริง สำหรับห้องเรียนเสมือนจริงเป็นการนำเอาระบบสารสนเทศและเทคโนโลยีมาช่วยในการสร้างห้องเรียนผ่านเทคโนโลยีอินเทอร์เน็ต

2.13 การออกแบบห้องเรียนเสมือนจริง

ชัยวัฒน์ เนื่อมั่ง (2552) ได้กล่าวไว้ว่าการออกแบบห้องเรียนเสมือนจริงสามารถออกแบบให้มีลักษณะดังนี้

2.13.1 Easy to use ได้มีการนำเทคโนโลยีที่เป็น Open Source ของ PHP มาช่วยในการพัฒนาโดยเน้นการใช้งานง่าย และมีรูปแบบในการนำเสนอ ที่สวยงาม

2.13.2 Multimedia นักเรียนจะเรียนรู้บทเรียนจากภาพและเสียง สามารถควบคุมขั้นตอนของการเรียนรู้ได้ด้วยการใช้นิ้วสัมผัสของตนเอง

2.13.3 Asynchronous Learning หมายถึง การเรียนที่ไม่จำเป็นจะต้องมีครูผู้สอนอยู่กับนักเรียนในเวลาและสถานที่เดียวกัน ครูจะจัดทำ/รวบรวม “บทเรียนออนไลน์” ซึ่งใช้เรียนที่ไหนก็ได้ เวลาใดก็ได้ ตามแต่ผู้เรียนจะสะดวก บทเรียนมีให้เลือกมากมาย และเชื่อมโยงไปยังบทเรียนอื่น ๆ ที่มีความเกี่ยวเนื่องกัน

2.14 ลักษณะการจัดการเรียนการสอนแบบห้องเรียนเสมือนจริง

ชัยวัฒน์ เชื้อมั่ง (2552) ได้กล่าวว่า การจัดการการเรียนการสอนแบบห้องเรียนเสมือนเป็นการจัดการศึกษาในลักษณะการสอนทางไกลผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เพื่อให้เข้าในระบบการจัดการการเรียนการสอนแบบห้องเรียนเสมือนมากยิ่งขึ้นขอกล่าวถึง 2 วิธี ต่อไปนี้

2.14.1 การศึกษาทางไกล (Distance Learning)

การศึกษาทางไกลเป็นการเปิดโอกาสทางการศึกษาให้แก่ผู้ใฝ่เรียนที่ไม่สามารถสละเวลาไปรับการศึกษาจากระบบการศึกษาปกติได้ เนื่องจากภาระหน้าที่การทำงานหรือครอบครัว และเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้ที่ต้องการเพิ่มพูนหรือปรับปรุงความรู้ที่มีอยู่ให้ทันสมัยเพื่อประโยชน์ในการทำงาน

การศึกษาทางไกล (Distance Education) หมายถึง ระบบการศึกษาที่ผู้เรียนและผู้สอนอยู่ไกลกัน แต่สามารถทำให้เกิดการเรียนรู้ได้โดยอาศัยสื่อการสอนในลักษณะของสื่อประสม กล่าวคือการใช้สื่อต่างๆร่วมกันเช่น ตำราเรียน เทปเสียง แผนภูมิ คอมพิวเตอร์ หรือโดยการใช้อุปกรณ์ทางโทรคมนาคม และสื่อมวลชนประเภทวิทยุและโทรทัศน์เข้ามาช่วยในการแพร่กระจายการศึกษาไปยังผู้ที่ปรารถนาจะเรียนรู้ได้อย่างกว้างขวางทั่วทุกท้องถิ่น การศึกษานี้มีทั้งในระดับต้นจนถึงระดับสูงขั้นขั้นปริญญา (กิดานันท์ มลิทอง. 2536)

2.14.2 สื่อในการศึกษาทางไกล

การเลือกสื่อเพื่อใช้ในการศึกษาทางไกลจะต้องคำนึงถึงหลักจิตวิทยาที่ว่า ถ้าผู้เรียนต้องสัมผัสกับสื่อเป็นเวลานาน จะเกิดความเบื่อหน่าย ไม่สนุก เกิดความท้อแท้หมดกำลังใจในการศึกษาด้วยตนเอง ดังนั้นสื่อควรจะเป็นสื่อที่มีการเสริมแรง ให้กำลังใจ และให้ผู้เรียนสามารถรู้ความก้าวหน้าของตนเองเป็นระยะๆ การใช้สื่อในการเรียนแบบนี้จึงควรอยู่ในลักษณะสื่อประสม โดยมีสื่อใดสื่อหนึ่งเป็นสื่อหลักและมีสื่อชนิดอื่นเป็นสื่อเสริม ซึ่งสื่อที่ใช้ในการศึกษาทางไกลสามารถแยกออกได้ดังนี้

2.14.2.1 สื่อหลัก คือสื่อที่บรรจุเนื้อหารายละเอียดตามประมวลการสอนในแต่ละวิชาในหลักสูตร ผู้เรียนต้องศึกษาจากสื่อหลักให้ครบตามหลักสูตรของวิชาจึงจะสามารถเรียนรู้เนื้อหาได้อย่างครบถ้วน

2.14.2.2 สื่อเสริม คือ สื่อที่ช่วยเก็บตก ต่อเติมความรู้ให้แก่ผู้เรียนให้มีความรู้กระจ่างหากผู้เรียนศึกษาจากสื่อหลักแล้วยังไม่เพียงพอ ก็สามารถศึกษาจากสื่อเสริมได้ ซึ่งอาจจะอยู่รูปแบบของเทปสรุปบทเรียน วิทยุ เอกสารเสริมการสอน เสริมการพบกลุ่ม หรือเว็บไซต์ต่างๆ

2.15 ลักษณะของห้องเรียนเสมือนจริงสำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์

2.15.1 ความสามารถของห้องเรียนเสมือนจริง สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์

โปรแกรมนี้ช่วยผู้สอนสร้างหลักสูตรด้านคณิตศาสตร์ และจัดการเรียนการสอนผ่านระบบอินเทอร์เน็ต มีผู้ใช้งานด้วยกัน 3 ประเภทได้แก่

2.15.1.1 ผู้ดูแล (Administrator) : ติดตั้งระบบ บำรุงรักษา กำหนดค่าเริ่มต้น และกำหนดสิทธิ์การเป็นผู้สอน

2.15.1.2 ผู้สอน (Teacher) : เพิ่มเนื้อหา เพิ่มข้อสอบ ให้คะแนน และสนทนากับนักเรียนเป็นต้น

2.15.1.3 ผู้เรียน (Student) : เข้าเรียนหัวข้อต่างๆ ทำแบบฝึกหัด สอบตามวันเวลาที่ได้กำหนด

2.15.2 ผู้สอนสามารถเข้าร่วมกิจกรรมต่อไปนี้ ได้แก่

2.15.2.1 ห้องสนทนา

2.15.2.2 ตอบกระทู้

2.15.2.3 สร้างบทเรียน

2.15.2.4 ข่าวและประกาศ

2.15.2.5 ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์

2.15.2.6 แบบประเมินความพึงพอใจ

2.15.3 นักเรียนสามารถเข้าร่วมกิจกรรมได้ดังนี้

2.15.3.1 สมัครเป็นสมาชิกของระบบ

2.15.3.2 เข้าเรียนในรายวิชาที่ได้รับอนุญาต

2.15.3.4 ทำกิจกรรมและแบบฝึกหัด

2.15.3.5 ฝากคำถาม หรือแสดงความคิดเห็น หรือสนทนากับผู้สอนและเพื่อน

ผ่านระบบ

2.15.3.6 เข้าสอบตามวันเวลาที่กำหนด

2.15.3.7 ประเมินความพึงพอใจในการเรียนผ่านระบบ

2.16 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยง

2.16.1 งานวิจัยต่างประเทศ

เดรีกเซล (Drexel, 1997: 2119-A) ได้ศึกษาการเชื่อมโยงระหว่างเศษส่วนธรรมดา (Common Fraction) กับเศษส่วนทศนิยม (Decimal Fraction) หรือเศษส่วนที่มีพหุคูณของ 10 เริ่มต้นที่เลือกนักเรียน 9 คน ซึ่งเป็นนักเรียนเกรด 6 ที่อยู่ต่างห้องเรียนกันมาทดสอบความสามารถในการเชื่อมโยงเศษส่วนธรรมดาและเศษส่วนทศนิยม โดยให้ทำข้อสอบเศษส่วนแบบเขียนตอบ และสัมภาษณ์ถึงการเรียนเรื่องเศษส่วนที่ผ่านมา เพื่อจะได้ทราบระดับความรู้และมโนคติเรื่องเศษส่วนของนักเรียน ปรากฏว่ามโนคติเรื่องเศษส่วนของนักเรียนมีอยู่จำกัด ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้บทเรียน 6 บท ในการปูพื้นฐานมโนคติและทักษะเรื่องเศษส่วน และใช้บทเรียนเพียง 2 บท ในการเชื่อมโยงมโนคติของเศษส่วนธรรมดาและเศษส่วนทศนิยมกับกลุ่มตัวอย่าง หลังจากการใช้บทเรียนก็ทำการสัมภาษณ์นักเรียนเป็นรายบุคคล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนสามารถจำแนก เปรียบเทียบ ดำเนินการบวกและลบเศษส่วนทศนิยมได้ สามารถนำหลักการของ

เศษส่วนธรรมดาไปใช้กับเศษส่วนทศนิยมได้ ซึ่งข้อจำกัดนี้ชี้ว่า ความรู้ของนักเรียนยังมีปัญหาต่อการนำมาใช้ แต่จากการที่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงเศษส่วนธรรมดาและเศษส่วนทศนิยมมาสัมพันธ์กันได้ อาจมีความหมายต่อความเข้าใจโมโนติ และการดำเนินการในทศนิยม

วิลเลียมส์ (Williams. 1999: 3836-A) ได้ศึกษาการเชื่อมโยงความคิดรวบยอดเรื่องจำนวนกับการคิดในใจ ด้วยการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการคิดในใจของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 จำนวน 413 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 183 คน กลุ่มควบคุม 230 คน และครูเข้าร่วมในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จำนวน 6 คน กลุ่มทดลองใช้ชุดการสอนจำนวน 83 บทเรียน เรื่องจำนวน กลุ่มควบคุมใช้การสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า ชุดการเรียนที่ใช้มีผลทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านการเชื่อมโยงการคิดในใจแตกต่างกับกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .0001 ผลจากการสัมภาษณ์กลุ่มทดลองพบว่า มีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยในกระบวนการเชื่อมโยงการคิดในใจของนักเรียนก่อนและหลังสอนโดยใช้ชุดกิจกรรม

ลอว์สัน และ ชินนาพพาน (Lawson; & Chinnappan. 2000: 26-43) ได้ศึกษาการเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ศึกษาตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างการทำการแก้ปัญหาและคุณภาพระบบความรู้ของนักเรียน จากนักเรียน 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกับกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงมีการเชื่อมโยงความรู้ที่ได้เรียนรู้ได้อย่างมีแบบแผน มีระบบ มากกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ และมีระบบความคิดของการเชื่อมโยงความรู้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตที่นำไปสู่ความสำเร็จได้มากกว่า

อีริก (Eric. 2000: 500-508) ได้ศึกษาการสร้างการเชื่อมโยงระบบพิชิตจากจากความเข้าใจของนักเรียน ตัวแทนที่หลากหลายของฟังก์ชันที่มีอยู่ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของโรงเรียนมัธยมศึกษานั้นมีนักเรียนจำนวนมากที่มีความบกพร่องในความเข้าใจการเชื่อมโยง โดยเฉพาะความเข้าใจในการเชื่อมโยงระหว่างตัวแทนทางพีชคณิตและกราฟของฟังก์ชัน จากนักเรียน 178 คน ที่ลงทะเบียนเรียนพีชคณิตทางแคลคูลัส ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีการเชื่อมโยงความรู้โดยใช้ตัวแทนทางพีชคณิตและตัวแทนเชิงกราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหของนักเรียนมีความถูกต้องในการเชื่อมโยงความรู้ของนักเรียนได้มากกว่า

พูกาลี (Pugalee. 2001: 236-243) ได้ศึกษาตรวจสอบเกี่ยวกับการเขียนของนักเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่แสดงโครงร่างการรู้คิดอย่างชัดเจนกับนักเรียนเกรด 9 จำนวน 20 คน ที่ได้ลงทะเบียนในหลักสูตรพีชคณิต ที่ได้เตรียมการเขียนอธิบายกระบวนการแก้ปัญหาที่พวกเขาทำในวิชาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการเขียนใน

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นทักษะที่จำเป็นที่แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนถึงโครงร่างของการรู้คิดที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งให้เห็นถึงการประสานกันของพฤติกรรมการรู้คิดที่หลากหลาย ทำให้มีการวิเคราะห์ข้อมูลอย่างมีคุณภาพ มีระบบ มีการจัดการที่ดี ซึ่งให้เห็นถึงความสำคัญของการเขียนว่าเป็นส่วนหนึ่งของการบูรณาการหลักสูตรทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้แสดงความคิดทางการเขียนและทางด้านภาษา ให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงกับขีดความสามารถที่นักเรียนมีอยู่

ไคล์ และคณะ (Kyle; et al. 2001: 80-86) ได้พัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของนักเรียน โดยใช้วิธีเข้าไปเยี่ยมชมครอบครัวของนักเรียน ใช้การพูดคุยแบบไม่เป็นทางการและการสัมภาษณ์ที่มีโครงสร้าง หลังจากนั้นจึงรวบรวมข้อมูลและจัดรูปแบบของสิ่งที่นักเรียนสนใจและทักษะการปฏิบัติของแต่ละครอบครัว ซึ่งบางอย่างเกี่ยวกับขั้นตอนการทำเกษตร การเลี้ยงสัตว์ การฝีมือ การดูทีวี และการทำอาหาร หลังจากนั้นผู้วิจัยได้นำข้อมูลนั้นมาพัฒนาเป็นปัญหาที่มีความหลากหลาย และมีขั้นตอนในการการแก้ปัญหาหลายขั้นตอน แล้วนำมาให้นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า ผู้ปกครองของนักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น จากที่เคยคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องยาก และช่วยให้ครูผู้สอนสามารถนำความรู้ที่บ้านของนักเรียนมาช่วยส่งเสริมการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้ดีขึ้น นอกจากนั้นแล้ว ไคล์ และคณะ ยังเชื่อว่าการให้นักเรียนได้ทำงานที่มีความหมาย การให้แก้ปัญหาในสถานการณ์จริง เป็นแนวทางที่ดีที่สุดในการส่งเสริมความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน และนักเรียนจะได้รับการส่งเสริมอย่างสุดความสามารถถ้าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้นได้เชื่อมโยงเข้ากับความเป็นส่วนตัวของพวกเขา ความรู้และทักษะที่ครอบครัวเขาสนใจ

แพนดิสซิโอ (Pandiscio. 2002: 216-221) ได้สำรวจการโยงมโนติการพิสูจน์กับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เรขาคณิตของนักศึกษาฝึกสอน โดยให้นักศึกษาฝึกสอน 4 คน (ชาย 2 คน หญิง 2 คน) แก้ปัญหาเรขาคณิตที่ไม่คุ้นเคยโดยใช้พื้นฐานมโนติของยุคคิดจำนวน 2 ข้อ ให้สร้างการพิสูจน์ตามรูปแบบที่ให้ผลออกมาเป็นรูปแบบกรณีทั่วไป และให้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษาฝึกสอนทั้ง 4 คน ยอมรับว่า แม้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิตจะไม่ได้ช่วยพิสูจน์ แต่ก็ เป็นเครื่องมือช่วยสร้างความรู้สึกลึก (Sense) ให้เกิดความเข้าใจความสัมพันธ์ในปัญหาหรือทฤษฎีบทเพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ได้

2.16.2 งานวิจัยในประเทศ

สมบัติ แสงทองคำสุก (2545: 94-97) ได้พัฒนารูปแบบการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหาเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนนารีวิทยา เขตบางบอน กรุงเทพมหานคร จำนวน 45 คน ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 โดยมีค่าประสิทธิภาพ 89.84/82.32 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหาเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงดังกล่าวหลังได้รับการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เทอดเกียรติ วงศ์สมบูรณ์ (2547: 50-51) ได้ออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยง เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอนตามเกณฑ์ 70/70 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยออกแบบขึ้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบางแก้วประชาสรรค์ จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 40 คน ผลการวิจัยพบว่าประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยงเท่ากับ 82.9/70.1 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นี้สามารถสอบผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 70 ของนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

นงลักษณ์ แก้วมาลา (2547: 73-75) ได้สร้างชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการเรียนการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์นี้ด้วย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนหนองแคว “สรกิจพิทยา” อำเภอหนองแคว จังหวัดสระบุรี ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภายหลังได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศศิธร แก้วรักษา (2547: 58-59) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบซิปปา (CIPPA Model) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่อง สถิติเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และหาประสิทธิภาพของกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นี้โดยพิจารณาจากเกณฑ์ประสิทธิภาพ 80/80 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ กลุ่ม

ตัวอย่างเป็น นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 45 คน ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบซิปปา (CIPPA Model) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่อง สถิติเบื้องต้น มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 โดยมีประสิทธิภาพ 82.11/83.59 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นี้สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุพรรณิภา หล้าฤทธิ์ (2547: 80-84) ได้พัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการคิดแบบเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนบ้านวังน้ำขาวชนูปถัมภ์ อำเภอเมือง จังหวัดหนองบัวลำภู จำนวน 20 คน ผลการวิจัยพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการคิดแบบเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ในลักษณะต่างๆช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง ครูผู้สอนสามารถนำกิจกรรมในลักษณะนี้ไปใช้ในการเรียนการสอนในเรื่องต่างๆที่เกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

ลิลดา คลภาค (2549: 56-60) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการเรียนการสอนโดยใช้ กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการเรียนการสอนเรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงสามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่า มีการศึกษาเกี่ยวกับการเรียนการสอนที่เน้นหรือส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง ทั้งการเชื่อมโยงความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการเรียนการสอนที่เน้นหรือส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงจะมีทักษะในการแก้ปัญหาและสามารถแสดงวิธีการในการแก้ปัญหาได้หลายวิธี นอกจากนี้ การเชื่อมโยงยังช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นผู้วิจัย จึงเห็นว่า ในการสอนเกี่ยวกับโจทย์ปัญหานั้น ครูผู้สอนควรสอนแบบบูรณาการความรู้เข้าด้วยกัน สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิดการเชื่อมโยงความรู้ ทั้งการเชื่อมโยงความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์

การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

2.17 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับห้องเรียนเสมือนจริง

2.17.1 งานวิจัยในประเทศ

ปราณี ทองคำ (2548) ได้ทำวิจัยเรื่อง “สภาพการใช้และความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการเรียนการสอนในห้องเรียนเสมือน : กรณีศึกษารายวิชา 266-416 การวิจัยสำหรับครู” เป็นการวิจัยที่มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสภาพการใช้ ความพึงพอใจ และปัญหาอุปสรรคจากการเรียนการสอนในห้องเรียนเสมือนจริงของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี ที่เรียนวิชา 266-416 โดยใช้ระบบ Moodle ซึ่งเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่แบบสอบถามวัดสภาพการใช้ ความพึงพอใจ และปัญหาอุปสรรคในการใช้ห้องเรียนเสมือน วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้สถิติพื้นฐานและการวิเคราะห์เนื้อหาผลการวิจัยสภาพการใช้ห้องเรียนเสมือนของนักศึกษารายวิชา 266-416 การวิจัยสำหรับครู ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 จากนักศึกษาจากนักศึกษาทั้งหมดจำนวน 48 คน พบว่า นักศึกษาส่วนมาก (ร้อยละ 47.9) ใช้ห้องเรียนเสมือน 1-5 ครั้งต่อภาคเรียน รองลงมา (ร้อยละ 31.3) ใช้ห้องเรียนเสมือน 6-10 ครั้งต่อภาคเรียน ที่เหลือ (ร้อยละ 20.8) เป็นนักศึกษาที่ใช้มากกว่า 10 ครั้งต่อภาคเรียน โดยมีค่าเฉลี่ยการใช้ห้องเรียนเสมือน 7.47 ครั้ง และสถานที่ที่นักศึกษาเข้าใช้ห้องเรียนเสมือนจากมากไปหาน้อย ได้แก่ นักศึกษาส่วนใหญ่ใช้ที่ห้องบริการคอมพิวเตอร์ คณะศึกษาศาสตร์ (ร้อยละ 88.5) และใช้ที่ศูนย์คอมพิวเตอร์ วิทยาเขตปัตตานี (ร้อยละ 80.8) และใช้ที่สำนักวิทยบริการ (ร้อยละ 30.8) มีนักศึกษาน้อยมากที่สามารถใช้จากหอพักหรือบ้านพัก (ร้อยละ 7.7)

สิริพร อภิวงค์งาม (2549) นำเสนอรูปแบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นสื่อเสริมการเรียนการสอนในห้องเรียนเรื่อง “การออกแบบบรรจุภัณฑ์” ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ โดยมีการบวนการสร้างความรู้ โดยการปฏิสัมพันธ์การสืบเสาะข้อมูลจากแหล่งการเรียนรู้ต่างๆ จนทำให้เกิดแนวคิดที่สร้างองค์ความรู้ของตนเองได้ ได้แก่ 1) บทเรียน เรื่องการออกแบบบรรจุภัณฑ์ ซึ่งเป็นสื่อเสริมการเรียนการสอนในห้องเรียน ผ่านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ 2) แบบสัมภาษณ์ความคิดเห็นและข้อมูลเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ 3) แบบสอบถามความคิดเห็นของผู้ใช้ (นักศึกษา) และ 4) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทั้งก่อนและหลังใช้สื่อ ซึ่งการวิจัยพบว่า 1) ผู้เชี่ยวชาญมีความคิดเห็น ต่อการออกแบบห้องเรียนเสมือนจริง ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ เรื่องการออกแบบบรรจุภัณฑ์ มีค่าเฉลี่ย $\bar{x} = 3.71$ ซึ่งอยู่ในระดับมาก 2) ความพึงพอใจของผู้ใช้บทเรียน ผ่านห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นสื่อการสอน มีค่าเฉลี่ย $\bar{x} = 3.81$ ซึ่งอยู่ในระดับมาก

3) นักศึกษามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01 จากผลการวิจัยจะเห็นว่า ได้ว่าบทเรียน สามารถใช้เป็นสื่อเสริมการเรียนการสอน เพื่อให้นักศึกษามีความเข้าใจในเนื้อหา และมีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงขึ้น

แจ่มจันทร์ ทองสา (2544) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การนำเสนอรูปแบบบทเรียน มัลติมีเดียตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ ผู้เชี่ยวชาญด้านการออกแบบบทเรียนคอมพิวเตอร์หรือบทเรียนมัลติมีเดีย และผู้เชี่ยวชาญด้านการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 25 ท่าน ผลการวิจัยพบว่า 1) ผู้เชี่ยวชาญมีความคิดเห็นว่ารูปแบบบทเรียน มัลติมีเดียตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ประกอบด้วย 11 ด้านคือ ด้านองค์ประกอบบทเรียน / เนื้อหา และตัวผู้เรียน ด้านการนำเสนอการจัดการเรียนการสอน ด้านการจัดกิจกรรม ด้านการชี้แนะ ด้านการสรุปความรู้ ด้านการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านปฏิสัมพันธ์ ด้านการให้ผลป้อนกลับ ด้านการควบคุมบทเรียน ด้านการนำไปใช้งาน 2) ผู้เชี่ยวชาญมีความคิดเห็นสอดคล้องกัน ในรายละเอียดของรูปแบบดังนี้ บทเรียนมัลติมีเดียตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ควรมี องค์ประกอบทั้งด้านบทเรียน เนื้อหา และลักษณะของผู้เรียนซึ่งผู้เรียนควรมีลักษณะเป็นผู้ที่มีความคิดสร้างสรรค์ แสวงหาคำตอบด้วยตนเอง มีองค์ความรู้ทั้งทางด้านกายภาพ ทางตรรกะ และทางสังคม ด้านบทเรียนควรมีการนำเสนอลักษณะเนื้อหาที่มีการเชื่อมโยงความคิดเดิมกับ ความคิดใหม่ให้ผู้เรียนรู้จักการค้นคว้าด้วยตนเอง

สุดาพันธ์ จุลเอียด (2552) ได้สร้างการวิจัยโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) สร้าง บทเรียนบนห้องเรียนเสมือนจริงโดยประยุกต์การเรียนแบบใช้ปัญหาเป็นหลัก เรื่องภาวะผู้นำทางเทคโนโลยีการศึกษา ให้มีประสิทธิภาพไม่น้อยกว่าเกณฑ์ 2) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียนและ หลังเรียน จากการใช้บทเรียนบนห้องเรียนเสมือนโดยประยุกต์การเรียนแบบใช้ปัญหาเป็นหลัก เรื่องภาวะผู้นำทางเทคโนโลยีการศึกษา 3) ศึกษาความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการใช้บทเรียนบน ห้องเรียนเสมือนโดยประยุกต์การเรียนแบบใช้ปัญหาเป็นหลัก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างวิจัยคือนักศึกษา ระดับปริญญาตรี วิชาเอกเทคโนโลยีการศึกษาชั้นปีที่ 3 ปีการศึกษา 2551 จำนวน 42 คน โดยใช้ผล การเรียนสะสมของนักเรียนในการแบ่งกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า 1) บทเรียนบนห้องเรียนเสมือนโดย ประยุกต์การเรียนแบบใช้ปัญหาเป็นหลักเรื่องภาวะผู้นำทางเทคโนโลยีการศึกษา มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 82.00/82.33 2) ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01 และ 3) ความพึงพอใจของผู้เรียนที่มีต่อบทเรียนห้องเรียนเสมือนโดยประยุกต์การเรียนแบบใช้ปัญหา เป็นหลัก เรื่องภาวะผู้นำทางเทคโนโลยีการศึกษา มีความพึงพอใจทุกด้านอยู่ในระดับมากยกเว้น ด้านความเร็วในการแสดงภาพและบทเรียนอยู่ในระดับปานกลาง

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่า มีการศึกษาผลสัมฤทธิ์และความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงโดยใช้วิธีการเรียนทั้งแบบคอนสตรัคติวิสต์ และแบบใช้ปัญหาเป็นฐาน ซึ่งผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่านักเรียนที่เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงโดยใช้วิธีการเรียนทั้งแบบคอนสตรัคติวิสต์ และแบบใช้ปัญหาเป็นฐานนั้นมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และมีความพึงพอใจในการเรียนอยู่ในระดับปานกลางขึ้นไป ผู้วิจัยพบว่าแนวคิดแบบคอนสตรัคติวิสต์ครอบคลุมเนื้อหาต่างๆประกอบด้วย 11 ด้านคือ ด้านองค์ประกอบบทเรียน/เนื้อหา และตัวผู้เรียน ด้านการนำเสนอการจัดการเรียนการสอน ด้านการจัดกิจกรรม ด้านการชี้แนะ ด้านการสรุปความรู้ ด้านการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านปฏิสัมพันธ์ ด้านการให้ผลป้อนกลับ ด้านการควบคุมบทเรียน และด้านการนำไปใช้งาน ดังนั้นผู้วิจัยเห็นว่าการแทรกแนวคิดแบบคอนแบบคอนสตรัคติวิสต์และแบบใช้ปัญหาเป็นฐานในการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นสิ่งที่ผู้สอนควรสอดแทรกในการออกแบบการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนมากยิ่งขึ้น ทั้งนี้จะต้องขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของสถานการณ์จริงของการสอนนั้นๆ ด้วย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน
2. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือวิจัย
5. การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ผู้วิจัยศึกษาข้อมูลพื้นฐานจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศเกี่ยวกับหัวข้อต่างๆ ต่อไปนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่บรรจุอยู่ในหลักสูตร
2. การออกแบบแผนการสอนแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง
3. การจัดการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)
4. การวัดและประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
5. การวัดระดับความพึงพอใจ

2. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

การศึกษาวิจัยครั้งนี้ประชากรคือ นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ ในสังกัดของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

กลุ่มตัวอย่าง

การศึกษาครั้งนี้ประกอบไปด้วยกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 3 กลุ่มที่ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง เกณฑ์ในการเลือกกลุ่มตัวอย่างคือกลุ่มตัวอย่างจะต้องเป็นนักเรียนซึ่งอยู่ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในสามจังหวัดชายแดนภาคใต้ ผู้วิจัยจึงสำรวจรายชื่อโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จากนั้นเลือกโรงเรียนกลุ่มตัวอย่างมาจังหวัดละ 1 โรงเรียน โดยใช้วิธีการเลือกแบบเจาะจงแล้วเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนที่ได้มาจากแต่ละจังหวัดมาโรงเรียนละ 1 ห้องเรียน โดยใช้วิธีการเลือกแบบเจาะจงเช่นกัน โดยครูผู้สอนคณิตศาสตร์ของโรงเรียนนั้นๆ เป็นผู้กำหนดนักเรียนที่จะมาเป็นกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เกณฑ์ความสะดวกในการจัดเวลาเรียน และความสะดวกของครูผู้ควบคุมการจัดการเรียนการสอน

1. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.5 และ ม.6) ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในจังหวัดยะลา จำนวน 1 โรงเรียน (โรงเรียนกาบังพิทยาคม) โรงเรียนละ 1 ห้อง (จำนวน 33 คน คละความสามารถ)

2. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.6) ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในจังหวัดปัตตานี จำนวน 1 โรงเรียน (โรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร”) โรงเรียนละ 1 ห้อง (จำนวน 25 คน คละความสามารถ)

3. นักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.5 และ ม.6) ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในจังหวัดนราธิวาส จำนวน 1 โรงเรียน (โรงเรียนบาเจาะ) โรงเรียนละ 1 ห้อง (จำนวน 36 คน คละความสามารถ)

3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
2. ระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียนเรื่องแคลคูลัส ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

4. แบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

4. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือวิจัย

4.1 แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ศึกษาเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสในช่วงชั้นที่ 4
3. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง
4. ออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง จำนวนทั้งสิ้น 12 แผนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้
 - 1) LIMIT ของฟังก์ชัน (จำนวน 3 ชั่วโมง)
 - 2) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ LIMIT ของฟังก์ชัน (จำนวน 3 ชั่วโมง)
 - 3) ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (จำนวน 3 ชั่วโมง)
 - 4) ความชันของเส้นโค้ง (จำนวน 2 ชั่วโมง)
 - 5) อนุพันธ์ของฟังก์ชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง (จำนวน 4 ชั่วโมง)
 - 6) การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร (จำนวน 4 ชั่วโมง)
 - 7) อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง (จำนวน 3 ชั่วโมง)
 - 8) การประยุกต์ของอนุพันธ์ (จำนวน 5 ชั่วโมง)
 - 9) ปริพันธ์ (จำนวน 2 ชั่วโมง)
 - 10) ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (จำนวน 2 ชั่วโมง)
 - 11) ปริพันธ์จำกัดเขต (จำนวน 3 ชั่วโมง)
 - 12) พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง (จำนวน 2 ชั่วโมง)
5. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสม พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงและแก้ไข
6. ปรับปรุงและแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

7. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้รับการปรับปรุงและแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 15 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งมีความรู้ความสามารถทั้งเก่ง ปานกลาง และอ่อน เพื่อทดสอบดูความเหมาะสม โดยการสังเกตอย่างใกล้ชิด สัมภาษณ์ผู้เรียน แล้วนำไปปรับปรุงและแก้ไข

8. นำแผนการจัดการเรียนรู้ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจพิจารณาอีกครั้ง แล้วจึงนำไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

4.2 ระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1. ศึกษาโปรแกรมห้องเรียนเสมือนจริงที่ใช้อยู่ในปัจจุบันและเลือกข้อดีของแต่ละระบบมาพัฒนาเป็นโปรแกรม

2. ศึกษาการออกแบบฐานข้อมูลเชิงสัมพันธ์เพื่อใช้ในการออกแบบฐานข้อมูล
3. ศึกษาโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้พัฒนาระบบห้องเรียนเสมือนจริง
4. ศึกษาการวิเคราะห์และออกแบบระบบโดยใช้หลักการ SDLC
5. พัฒนาระบบห้องเรียนเสมือนจริง โดยมีรายละเอียดในการพัฒนาดังนี้

5.1 ฟังก์ชันการทำงานของนักเรียน

- ลงทะเบียนนักเรียน
- บทเรียนเรื่องแคลคูลัส
- สมุดบันทึก
- การส่งงาน
- ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- แบบประเมินความพึงพอใจ
- ห้องสนทนา
- ประวัติส่วนตัว

5.2 ฟังก์ชันการทำงานของอาจารย์

- เรื่อง
- ตารางสอน
- ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- แบบประเมินความพึงพอใจ
- ห้องสนทนา
- ข่าวประกาศ
- ข้อมูลส่วนตัว

5.3 ฟังก์ชันการทำงานของผู้ดูแลระบบ

- บันทึกเนื้อหา
- ตารางสอน
- ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- แบบประเมินความพึงพอใจ
- ห้องสนทนา
- กระดาน
- ข่าวประกาศ
- โรงเรียน
- รายชื่อผู้ใช้งาน
- ข้อมูลส่วนตัว

6. นำระบบที่สร้างเสร็จทำการทดสอบ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสม พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงและแก้ไข

7. ปรับปรุงการใช้งานตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ
8. ทดสอบการใช้งานจริงและติดตั้งในเครื่องแม่ข่าย
9. ใช้งานจริง

4.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียนเรื่องแคลคูลัส ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียนเรื่องแคลคูลัส ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นแบบทดสอบที่วัดความสามารถในการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตร โดยมีได้วัดทักษะการเชื่อมโยงแต่อย่างใด มีลำดับการสร้างดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
2. วิเคราะห์เนื้อหา สารสำคัญ และจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง เพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัส
3. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัส เป็น ข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 3 ชุด ชุดละ 25 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ดังนี้

ชุดที่ 1 แบบทดสอบเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ชุดที่ 2 แบบทดสอบเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

ชุดที่ 3 แบบทดสอบเรื่องปริยานุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

4. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าแบบทดสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้หรือไม่ โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่ได้รับการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญแล้วมาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยเลือกแบบทดสอบปรนัยจำนวนชุดละ 20 ข้อ

6. นำแบบทดสอบที่ได้จากข้อ 5 ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 15 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการทดลองแผนการจัดการเรียนรู้

7. นำแบบทดสอบที่ได้จากการสอบในข้อ 6 มาตรวจให้คะแนน โดยข้อที่ถูกให้ 1 คะแนน และข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบให้ 0 คะแนน

8. นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีความยากง่ายระหว่าง .20 - .80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป โดยเลือกแบบทดสอบปรนัยจำนวน 15 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่ผ่านการคัดเลือกในข้อ 8 มาคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่นสำหรับแบบทดสอบปรนัยโดยใช้สูตร KR – 20 (Kuder Richardson - 20)

10. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่ได้ ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4.4 แบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจ

2. วิเคราะห์วัตถุประสงค์ของการวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

3. สร้างแบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ประกอบด้วย

ตอนที่ 1 ข้อมูลเบื้องต้นของผู้ตอบแบบสอบถาม

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) แบ่งเป็น 2 ด้าน

- ด้านเนื้อหาวิชาและการสอน
- ด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ตอนที่ 3 ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่นๆ

4. นำแบบสอบถามที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา จากนั้นนำมาปรับปรุงแก้ไข

5. นำแบบสอบถามที่ได้จากข้อ 4 ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 15 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มเดียวกับการใช้ในการทดลองแผนการจัดการเรียนรู้ จากนั้นคำนวณหาค่าความเชื่อมั่น โดยวิธี Conbrack / KR – 21 (Kuder Richardson - 21)

6. นำแบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ที่ได้ ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

5. การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลโดยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. สืบจรวจรายชื่อโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จากนั้นเลือกโรงเรียนกลุ่มตัวอย่างมาจังหวัดละ 1 โรงเรียน โดยใช้วิธีการเลือกแบบเจาะจง

2. เลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ ในสังกัดของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาของ 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่ได้มาจากข้อที่ 1 โรงเรียนละ 1 ห้องเรียน โดยใช้วิธีการเลือกแบบเจาะจง

3. สร้างแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากนั้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและแก้ไข

4. ออกแบบและสร้างระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) เพื่อใช้ในการจัดการเรียนการสอน

5. ทำหนังสือขอความร่วมมือในการวิจัยจากมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลาไปยังโรงเรียนซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง

6. สร้างแบบทดสอบวัดผลทางเรียนเรื่องแคลคูลัส ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากนั้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและแก้ไข

7. หาค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัส

8. สร้างแบบสอบถามเพื่อวัดระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) จากนั้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและแก้ไข

9. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจของนักเรียน

10. ดำเนินการสอนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

11. เมื่อสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้แล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบ Virtual Classroom

12. ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามเพื่อวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบ Virtual Classroom

13. วิเคราะห์ข้อมูล

- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

- ระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

6. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

การวิจัยครั้งนี้มีสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) สำหรับ

- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

- ระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

2. ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

3. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) โดยใช้สัมประสิทธิ์แอลฟาของ Cronbach สำหรับ

- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน
- แบบสอบถามวัดระดับความพึงพอใจในการเรียนของนักเรียน

4. One-sample t-test สำหรับ

- การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการเรียนของกลุ่มตัวอย่างกับเกณฑ์ 50% และระดับความพึงพอใจ

- การเปรียบเทียบระดับความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงของกลุ่มตัวอย่างกับเกณฑ์ดี

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จากนั้นศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยในครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

ตอนที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จำนวน 3 โรงเรียน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ประกอบด้วย

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างแยกตามโรงเรียน

2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างรวม 3 โรงเรียน

3) ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 %

ตอนที่ 3 ความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ประกอบด้วย

- 1) ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม
- 2) ระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน และด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)
- 3) ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป
- 4) ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่นๆ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ตอนที่ 1 การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

ผู้วิจัยได้ทำการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ โดยในระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) นี้จะบรรจุเนื้อหาจำนวน 12 แผนการจัดการเรียนรู้ที่อยู่ในรูปแบบของเทปบันทึกการสอน ซึ่งนักเรียนจะต้องใช้เวลาในการเรียนทั้งสิ้นประมาณ 42 ชั่วโมง ขั้นแรกนักเรียนจะต้องลงทะเบียนขอใช้ระบบก่อน จากนั้นนักเรียนจะมี User Name และ Password เพื่อเข้าใช้ระบบ โดยนักเรียนจะสามารถเข้าเรียนบทเรียนเรื่องแคลคูลัส จดบันทึก ส่งใบงาน ทำข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทำแบบประเมินความพึงพอใจ ตั้งกระทู้ และสามารถสนทนาผ่านระบบได้ การเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงที่ผู้วิจัยได้พัฒนานี้จะอยู่ที่เว็บไซต์ <http://122.154.50.89/vc/> (ตัวอย่างห้องเรียนเสมือนจริงอยู่ในภาคผนวก)

ตอนที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลน
ครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จำนวน 3 โรงเรียน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะ
การเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัส ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 45 ข้อ ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 5 และมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัด
ชายแดนภาคใต้ ได้แก่ โรงเรียนกาบังพิไทยคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสาขบุรี “แจ้งประชา
การ” รวมจำนวน 94 คน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงในตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 5

1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
แยกตามโรงเรียน

ตารางที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
โรงเรียนกาบังพิไทยคม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ร้อยละของ ค่าเฉลี่ยเลข คณิต	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน SD.
นักเรียนโรงเรียน กาบังพิไทยคม	33	100	42.09	42.09	4.61

จากตารางที่ 1 แสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษา
ตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียนกาบังพิไทยคม จำนวน 33 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะ
การเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ
42.09 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.61

ตารางที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โรงเรียนบาเจาะ

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลข คณิต (เปอร์เซ็นต์)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน SD.
นักเรียนโรงเรียน บาเจาะ	36	100	40.19	40.19	5.73

จากตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียนบาเจาะ จำนวน 36 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 40.19 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.73

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โรงเรียนสาขานูรี “แจ้งประชาคาร”

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลข คณิต (เปอร์เซ็นต์)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน SD.
นักเรียนโรงเรียน สาขานูรี “แจ้งประชาคาร”	25	100	38.31	38.31	3.76

จากตารางที่ 3 แสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียนสาขานูรี “แจ้งประชาคาร” จำนวน 25 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 38.31 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 3.76

2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง รวม 3 โรงเรียน

ตารางที่ 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง รวม 3 โรงเรียน

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลข คณิต (เปอร์เซ็นต์)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน SD.
นักเรียนโรงเรียน					
- กาบังพิทยาคม					
- บาเจาะ	94	100	40.35	40.35	5.05
- สายบุรี “แจ้ง ประชากร”					

จากตารางที่ 4 แสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชากร” จำนวนทั้งสิ้น 94 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 40.35 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.05

ตารางที่ 5 ร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนผ่านเกณฑ์ 50%

โรงเรียน	ผ่านเกณฑ์ 50 %		ไม่ผ่านเกณฑ์ 50%	
	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ
กาบังพิทยาคม	18	54.55	15	45.45
บาเจาะ	17	47.22	19	52.78
สายบุรี “แจ้งประชากร”	11	44.00	14	56.00
รวม	46	48.94	48	51.06

จากตารางที่ 5 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคมจำนวนทั้งสิ้น 33 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 18 คน คิดเป็น 54.55% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 15 คน คิดเป็น 45.45% นักเรียนโรงเรียนบาเจาะ จำนวนทั้งสิ้น 36 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 17 คน คิดเป็น 47.22% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 19 คน คิดเป็น 52.78% และนักเรียนโรงเรียนสาขบุรี “แจ้งประชากร” จำนวนทั้งสิ้น 25 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 11 คน คิดเป็น 44.00% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 14 คน คิดเป็น 56.00% รวมจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด 94 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 46 คน คิดเป็น 48.94% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 48 คน คิดเป็น 51.06%

3) ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 %

ตารางที่ 6 ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 %

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	Test Value	($\bar{X}$)	SD.	t Value	Sig.
นักเรียนโรงเรียน						
- กาบังพิทยาคม						
- บาเจาะ	94	50	40.35	5.05	-18.51	0.00
- สาขบุรี “แจ้งประชากร”						

หมายเหตุ มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตารางที่ 6 แสดงให้เห็นว่า ค่า t Value มีค่าเป็นลบ จึงปฏิเสธสมมุติฐานรองที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 และจากคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนซึ่งมีค่าเท่ากับ 40.35 จึงสรุปได้ว่านักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual

Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนต่ำกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตอนที่ 3 ความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้ค่าเฉลี่ยที่ได้จากแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ได้แก่ โรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร” รวมจำนวน 63 คน

ในการพิจารณาระดับความพึงพอใจของนักเรียน ใช้เกณฑ์กำหนดดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.51 – 5.00 หมายถึง พึงพอใจมากที่สุด

คะแนนเฉลี่ย 3.51 – 4.50 หมายถึง พึงพอใจมาก

คะแนนเฉลี่ย 2.51 – 3.50 หมายถึง พึงพอใจปานกลาง

คะแนนเฉลี่ย 1.51 – 2.50 หมายถึง พึงพอใจน้อย

คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.50 หมายถึง พึงพอใจน้อยที่สุด

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงในตารางที่ 6 ถึงตารางที่ 12

1) ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

ตารางที่ 7 จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถาม จำแนกตามโรงเรียน

โรงเรียน	จำนวน	ร้อยละ
กาบังพิทยาคม	33	52.4
บาเจาะ	20	31.7
สายบุรี “แจ้งประชาคาร”	10	15.9
รวม	63	100

จากตารางที่ 7 จะเห็นว่า นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคม โดยมีจำนวน 33 คน คิดเป็นร้อยละ 52.4 รองลงมาคือนักเรียนโรงเรียนบาเจาะ มีจำนวน 20 คน คิดเป็น

ร้อยละ 31.7 และนักเรียนโรงเรียนสาธิตบุรี “แจ้งประชาคาร” มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 15.9 รวมนักเรียนที่ตอบแบบสอบถามทั้งหมด จำนวน 63 คน

ตารางที่ 8 จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนกาบังพิทยาคม จำนวน 33 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน

โรงเรียน	เพศ		ชั้น		เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน					
	ชาย	หญิง	ม.5	ม.6	< 1.50	1.50-1.99	2.00-2.49	2.50-2.99	3.00-3.49	3.50-4.00
กาบังพิทยาคม										
จำนวน	12	21	16	17	-	2	14	14	2	1
ร้อยละ	36.4	63.6	48.5	51.5	0	6.1	42.4	42.4	6.1	3.0

จากตารางที่ 8 จะเห็นว่า นักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคมที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 12 คน คิดเป็นร้อยละ 36.4 และที่เป็นเพศหญิง มีจำนวน 21 คน คิดเป็นร้อยละ 63.6 เป็นนักเรียนชั้น ม.5 จำนวน 16 คน คิดเป็นร้อยละ 48.5 และนักเรียนชั้นม.6 จำนวน 17 คน คิดเป็นร้อยละ 51.5 ไม่มีนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50 ส่วนเกรดเฉลี่ยรวม 1.50-1.99 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.1 เกรดเฉลี่ยรวม 2.00-2.49 มีจำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.4 เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.4 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.1 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 1 คน คิดเป็นร้อยละ 3.0

ตารางที่ 9 จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนบาเจาะ จำนวน 20 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน

โรงเรียน	เพศ		ชั้น		เกรด					
	ชาย	หญิง	ม.5	ม.6	< 1.50	1.50-1.99	2.00-2.49	2.50-2.99	3.00-3.49	3.50-4.00
บาเจาะ										
จำนวน	2	18	11	9	1	-	2	5	10	2
ร้อยละ	10.0	90.0	55.0	45.0	5.0	0	10.0	25.0	50.0	10.0

จากตารางที่ 9 จะเห็นว่า นักเรียนโรงเรียนบาเจาะที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0 และที่

เป็นเพศหญิง มีจำนวน 18 คน คิดเป็นร้อยละ 90.0 เป็นนักเรียนชั้น ม.5 จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 55.0 และนักเรียนชั้นม.6 จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 45.0 นักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50 มีจำนวน 1 คน คิดเป็นร้อยละ 5.0 และไม่มีนักเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยรวม 1.50-1.99 ส่วนนักเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยรวม 2.00-2.49 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0 เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 5 คน คิดเป็นร้อยละ 25.0 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 50.0 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0

ตารางที่ 10 จำนวนและร้อยละของผู้ตอบแบบสอบถามโรงเรียนสาขานบุรี “แจ้งประชาคาร” จำนวน 10 คน จำแนกตามเพศ ระดับชั้น และเกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบัน

โรงเรียน สาขานบุรี “แจ้ง ประชาคาร”	เพศ		ชั้น		เกรด					
	ชาย	หญิง	ม.5	ม.6	< 1.50	1.50-1.99	2.00-2.49	2.50-2.99	3.00-3.49	3.50-4.00
จำนวน	3	7	-	10	-	-	-	2	6	2
ร้อยละ	30.0	70.0	0	100	0	0	0	20.0	60.0	20.0

จากตารางที่ 10 จะเห็นว่า นักเรียนโรงเรียนสาขานบุรี “แจ้งประชาคาร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 30.0 และที่เป็นเพศหญิง มีจำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 70.0 ไม่มีนักเรียนชั้น ม.5 ส่วนนักเรียนชั้นม.6 มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 100 ไม่มีนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50, 1.50-1.99 และ 2.00-2.49 ส่วนนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 20.0 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 60.0 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 20.0

2) ระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน และด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ตารางที่ 11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน

ลำดับ ที่	ความพึงพอใจของนักเรียน ด้านเนื้อหาวิชาและการสอน	$\bar{X}$	SD.	ระดับความ พึงพอใจ
1.	ความชัดเจนในการกำหนดเค้าโครงในการสอน	3.90	.837	มาก
2.	ความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน	3.84	.745	มาก
3.	ความชัดเจนในการอธิบายเกี่ยวกับการวัดและ ประเมินผลการเรียน	3.73	.846	มาก
4.	เนื้อหาที่สอนครบถ้วนและตรงกับหลักสูตรปัจจุบัน	3.73	.971	มาก
5.	การสอนส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์อย่างมี เหตุผล	3.81	.965	มาก
6.	เทคนิคการสอนกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้	3.73	.827	มาก
7.	ความชัดเจนในการอธิบายและยกตัวอย่างประกอบ	3.75	.861	มาก
8.	การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับเนื้อหาอื่นๆใน วิชาคณิตศาสตร์	3.79	.744	มาก
9.	การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับวิชาอื่น	3.54	.858	มาก
10.	การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับชีวิตประจำวัน	3.56	.799	มาก
11.	ความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน	3.83	.814	มาก
รวม		3.73	.652	มาก

จากตารางที่ 11 จะเห็นว่า ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน

ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 3.73) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจเกี่ยวกับความชัดเจนในการกำหนดเค้าโครงในการสอนมากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 3.90) รองลงมาคือความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 3.84) และลำดับที่ 3 คือความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 3.83)

ตารางที่ 12 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาการ” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ลำดับ ที่	ความพึงพอใจของนักเรียน ด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง	$\bar{X}$	SD.	ระดับความ พึงพอใจ
1.	การชี้แจงและให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงก่อนการเรียน	4.03	.740	มาก
2.	นักเรียนสามารถทำความเข้าใจและทบทวนเพื่อเรียนรู้เนื้อหาได้ด้วยตนเอง	3.97	.647	มาก
3.	นักเรียนสามารถเข้ามาใช้ห้องเรียนเสมือนจริงในเวลาใดก็ได้	4.02	.635	มาก
4.	นักเรียนสามารถถามตอบข้อสงสัยผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงได้ทั้งกับเพื่อนและผู้สอน	3.94	.780	มาก
5.	นักเรียนสามารถส่งใบงานหรืองานที่ครูมอบหมายได้อย่างสะดวก	3.68	.800	มาก
6.	นักเรียนสามารถแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง	3.68	.877	มาก
7.	กิจกรรมในระบบห้องเรียนเสมือนจริงมีความหลากหลายและเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ	3.98	.871	มาก
8.	ความเหมาะสมของการวัดและประเมินผลการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง	4.00	.672	มาก
9.	โรงเรียนมีเครื่องคอมพิวเตอร์เพียงพอต่อนักเรียนในการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง	3.75	.879	มาก

ลำดับ ที่	ความพึงพอใจของนักเรียน ด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง	$\bar{X}$	SD.	ระดับความ พึงพอใจ
10.	ความเร็วของระบบอินเทอร์เน็ตสำหรับการใช้ ห้องเรียนเสมือนจริง	3.67	.967	มาก
11.	ความเหมาะสมในการนำห้องเรียนเสมือนจริงมาใช้ใน โรงเรียนที่ขาดแคลนครุภัณฑ์	3.71	.658	มาก
รวม		3.86	.569	มาก

จากตารางที่ 12 จะเห็นว่า ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่อง แคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 3.86) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจเกี่ยวกับการชี้แจงและให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงก่อนการเรียนมากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 4.03) รองลงมาคือนักเรียนสามารถเข้ามาใช้ห้องเรียนเสมือนจริงในเวลาใดก็ได้ โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 4.02) และลำดับที่ 3 คือความเหมาะสมของการวัดและประเมินผลการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}$ = 4.00)

ตารางที่ 13 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในภาพรวม

ด้าน ที่	ความพึงพอใจของนักเรียน	$\bar{X}$	SD.	ระดับความ พึงพอใจ
1.	ด้านเนื้อหาวิชาและการสอน	3.73	.652	มาก
2.	ด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)	3.86	.569	มาก
รวม		3.79	.587	มาก

จากตารางที่ 13 จะเห็นว่า ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่อง แคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

(Virtual Classroom) ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.79$) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.86$) รองลงมาคือด้านเนื้อหาวิชาและการสอน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.73$)

3) ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

ตารางที่ 14 ผลการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	Test Value	($\bar{X}$)	SD.	t Value	Sig.
นักเรียนโรงเรียน						
- กาบังพิทยาคม	63	3.51	3.79	.587	3.82	0.00
- บาเจาะ						
- สายบุรี “แจ้งประชาการ”						

หมายเหตุ มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตารางที่ 14 แสดงให้เห็นว่า ค่า $\text{sig.} < 0.05$ จึงยอมรับสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

4) ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่นๆ

หลังจากที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง นักเรียนได้มีความคิดเห็นและข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

1. อยากให้มีการเรียนการสอนผ่านห้องเรียนเสมือนจริงอย่างต่อเนื่อง
2. อยากให้มีการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงในเนื้อหาเรื่องอื่นๆ
3. เป็นการเรียนการสอนที่ดี

4. ผู้สอนสอนได้เข้าใจง่าย
5. การเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงซึ่งนักเรียนจะต้องใช้หูฟังอยู่หน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นทำให้นักเรียนมีสมาธิจดจ่ออยู่กับเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น
6. นักเรียนมีความสุขที่ได้เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง
7. เป็นการเรียนการสอนที่ดี แต่เนื่องจากพื้นฐานเก่าที่มีอยู่ของนักเรียนไม่เพียงพอที่จะเรียนเรื่องนี้ จึงทำให้นักเรียนบางคนไม่สามารถติดตามและเข้าใจเนื้อหาได้
8. ระบบอินเตอร์เน็ตมีปัญหาบ้างในบางครั้งจึงทำให้บางไฟล์เทปบันทึกการสอนติดขัดบางไฟล์เปิดไม่ได้ ทำให้ประสิทธิภาพการเรียนรู้ลดลง (เป็นเฉพาะบางโรงเรียนและบางเวลา)
9. อยากให้มีกิจกรรมที่หลากหลายมากกว่านี้

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

สรุปผลการวิจัย

ตอนที่ 1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ จำนวน 3 โรงเรียน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สรุปได้ดังนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียน กาบังพิทยาคม จำนวน 33 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 42.09 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.61

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียนบาเจาะ จำนวน 36 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 40.19 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.73

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนโรงเรียนสาขบุรี “แจ้งประชาคาร” จำนวน 25 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 38.31 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 3.76

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสาขบุรี “แจ้งประชากร” จำนวนทั้งสิ้น 94 คน ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ 40.35 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.05

5. นักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคมจำนวนทั้งสิ้น 33 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 18 คน คิดเป็น 54.55% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 15 คน คิดเป็น 45.45% นักเรียนโรงเรียนบาเจาะ จำนวนทั้งสิ้น 36 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 17 คน คิดเป็น 47.22% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 19 คน คิดเป็น 52.78% และนักเรียนโรงเรียนสาขบุรี “แจ้งประชากร” จำนวนทั้งสิ้น 25 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 11 คน คิดเป็น 44.00% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% มีจำนวน 14 คน คิดเป็น 56.00% รวมจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด 94 คน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 46 คน คิดเป็น 48.94% และไม่ผ่านเกณฑ์ 50% จำนวน 48 คน คิดเป็น 51.06%

6. จากการทดสอบสมมติฐาน พบว่าค่า t Value มีค่าเป็นลบ จึงปฏิเสธสมมติฐานรองที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนสูงกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 และจากคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนซึ่งมีค่าเท่ากับ 40.35 จึงสรุปได้ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนต่ำกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

1) ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

1. นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคม โดยมีจำนวน 33 คน คิดเป็นร้อยละ 52.4 รองลงมาคือนักเรียนโรงเรียนบาเจาะ มีจำนวน 20 คน คิดเป็นร้อยละ 31.7 และ

นักเรียนโรงเรียนสาขานารี “แจ้งประชาคาร” มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 15.9 รวมนักเรียนที่ตอบแบบสอบถามทั้งหมด จำนวน 63 คน

2. นักเรียนโรงเรียนกาบังพิทยาคมที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 12 คน คิดเป็นร้อยละ 36.4 และที่เป็นเพศหญิง มีจำนวน 21 คน คิดเป็นร้อยละ 63.6 เป็นนักเรียนชั้น ม.5 จำนวน 16 คน คิดเป็นร้อยละ 48.5 และนักเรียนชั้นม.6 จำนวน 17 คน คิดเป็นร้อยละ 51.5 ไม่มีนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50 ส่วนเกรดเฉลี่ยรวม 1.50-1.99 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.1 เกรดเฉลี่ยรวม 2.00-2.49 มีจำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.4 เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 42.4 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.1 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 1 คน คิดเป็นร้อยละ 3.0

3. นักเรียนโรงเรียนบาเจาะที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0 และที่เป็นเพศหญิง มีจำนวน 18 คน คิดเป็นร้อยละ 90.0 เป็นนักเรียนชั้น ม.5 จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 55.0 และนักเรียนชั้นม.6 จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 45.0 นักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50 มีจำนวน 1 คน คิดเป็นร้อยละ 5.0 และไม่มีนักเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยรวม 1.50-1.99 ส่วนนักเรียนที่มีเกรดเฉลี่ยรวม 2.00-2.49 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0 เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 5 คน คิดเป็นร้อยละ 25.0 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 50.0 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 10.0

4. นักเรียนโรงเรียนสาขานารี “แจ้งประชาคาร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ที่เป็นเพศชาย มีจำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 30.0 และที่เป็นเพศหญิง มีจำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 70.0 ไม่มีนักเรียนชั้น ม.5 ส่วนนักเรียนชั้นม.6 มีจำนวน 10 คน คิดเป็นร้อยละ 100 ไม่มีนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวมปัจจุบันน้อยกว่า 1.50, 1.50-1.99 และ 2.00-2.49 ส่วนนักเรียนที่ได้เกรดเฉลี่ยรวม 2.50-2.99 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 20.0 เกรดเฉลี่ยรวม 3.00-3.49 มีจำนวน 6 คน คิดเป็นร้อยละ 60.0 และเกรดเฉลี่ยรวม 3.50-4.00 มีจำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 20.0

2) ระดับความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอน และด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

1. ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ในด้านเนื้อหาวิชาและการสอนในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.73$) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจเกี่ยวกับความชัดเจนในการกำหนดเค้าโครงในการสอนมากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.90$) รองลงมาคือความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.84$) และลำดับที่ 3 คือความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.83$)

2. ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.86$) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจเกี่ยวกับการชี้แจงและให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงก่อนการเรียนมากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 4.03$) รองลงมาคือนักเรียนสามารถเข้ามาใช้ห้องเรียนเสมือนจริงในเวลาใดก็ได้ โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 4.02$) และลำดับที่ 3 คือความเหมาะสมของการวัดและประเมินผลการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 4.00$)

3. ระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.79$) โดยนักเรียนมีความพึงพอใจในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มากที่สุด โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.86$) รองลงมาคือด้านเนื้อหาวิชาและการสอน โดยอยู่ในระดับมาก ($\bar{X}= 3.73$)

4. จากการทดสอบสมมุติฐาน พบว่าค่า $\text{sig.} < 0.05$ จึงยอมรับสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากขึ้นไป ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

3) ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่นๆ

หลังจากที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) นักเรียนได้มีความคิดเห็นและข้อเสนอแนะ ว่าอยากให้มีการเรียนการสอนผ่านห้องเรียนเสมือนจริงอย่างต่อเนื่องทั้งในเนื้อหาเรื่องแคลคูลัส และเนื้อหาเรื่องอื่นๆ เนื่องจากเป็นระบบการสอนที่ดี ผู้สอน

สอนได้เข้าใจง่าย และการที่นักเรียนได้ใช้หูฟังอยู่หน้าจอคอมพิวเตอร์นั้น ทำให้มีสมาธิจดจ่ออยู่กับเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น โดยภาพรวม นักเรียนมีความเห็นว่ามีความสุขที่ได้เรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

อย่างไรก็ตามนักเรียนบางคนก็ยังคงมีปัญหาในการเรียน เนื่องจากพื้นฐานเก่าที่มีอยู่ของนักเรียนไม่เพียงพอที่จะเรียนเรื่องนี้ จึงทำให้นักเรียนบางคนไม่สามารถเข้าใจเนื้อหาได้ และระบบอินเตอร์เน็ตมีปัญหาบ้างในบางครั้งจึงทำให้ไฟล์เทปบันทึกการสอนบางไฟล์ติดขัด บางไฟล์เปิดไม่ได้ ส่งผลให้ประสิทธิภาพการเรียนลดลง (เป็นเฉพาะบางโรงเรียนและบางเวลา) นอกจากนี้ นักเรียนบางคนอยากให้มิกิจกรรมที่หลากหลายมากกว่านี้

อภิปรายผล

1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของนักเรียนในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ จำนวน 3 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนกาบังพิพัฒน์ โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร” ที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ผลปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังได้รับการสอนเท่ากับ 40.35 ซึ่งต่ำกว่าเกณฑ์ 50 % อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 ทั้งนี้อาจจะเป็นเพราะสาเหตุดังต่อไปนี้

1. ในการเรียนเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนั้น นักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์มาก่อน ซึ่งเมื่อพิจารณาเกรดเฉลี่ยปัจจุบันของนักเรียนรวมถึงความคิดเห็นที่นักเรียนให้ไว้ อาจกล่าวได้ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างบางคนมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่เพียงพอ จึงทำให้นักเรียนบางคนไม่สามารถติดตามและเข้าใจเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสที่กำลังเรียนอยู่ได้

2. ห้องเรียนเสมือนจริงมีระบบสนทนา (Chat) เพื่อให้ให้นักเรียนได้ถามปัญหาเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หรือไม่เข้าใจในบทเรียน โดยจะมีครูคณิตศาสตร์ออนไลน์อยู่ในระหว่างชั่วโมงเรียนที่นักเรียนต้องเรียน นอกจากนี้ยังมีกระดานถามตอบ เพื่อให้นักเรียนตั้งคำถามไว้เมื่อนักเรียนมีข้อคำถามเกี่ยวกับบทเรียน แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ได้ใช้ส่วนนี้ให้เกิดประโยชน์ จึงทำให้ปัญหาที่นักเรียนมีอยู่ไม่ได้รับการแก้ไขหรืออธิบาย ซึ่งส่งผลให้นักเรียนไม่เข้าใจในบทเรียนเรื่องนั้นๆ

3. นักเรียนส่วนใหญ่ยังมองว่าการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง เป็นการเรียนแบบรายบุคคล นักเรียนแต่ละคนนั่งเรียนและทำกิจกรรมอยู่เฉพาะหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง จึงขาดการอภิปรายร่วมกันเพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งในความเป็นจริงแล้วนักเรียนสามารถอภิปรายร่วมกันได้ และหากนักเรียนได้อภิปรายร่วมกันจะทำให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหาของบทเรียนมากขึ้นดังที่ สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 96) ได้กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือจะทำให้ศักยภาพทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น

4. เนื้อหาเรื่องแคลคูลัส เป็นเนื้อหาที่นักเรียนจะต้องเรียนเป็นลำดับรองสุดท้ายตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งเป็นเวลาที่นักเรียนจะต้องเตรียมสอบเพื่อเข้าเรียนต่อในระดับอุดมศึกษา จึงทำให้นักเรียนหลายคนละเลยในการเรียน ซึ่งในความเป็นจริงนั้นแคลคูลัสเป็นเนื้อหาที่สำคัญมากต่อการเรียนต่อในระดับอุดมศึกษา ทั้งในสายคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ รวมทั้งเป็นวิชาพื้นฐานของคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ แพทยศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ศึกษาศาสตร์ เป็นต้น

5. เนื่องจากสัญญาณอินเทอร์เน็ตของบางโรงเรียนมีสัญญาณอ่อนในบางเวลา จึงทำให้ไฟล์เทปบันทึกการสอนบางไฟล์มีการติดขัด บางไฟล์เปิดไม่ได้ ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดความไม่ต่อเนื่องในการเรียน และอาจส่งผลต่อประสิทธิภาพในการเรียน แต่อย่างไรก็ตามภาวะนี้เกิดขึ้นแค่บางเวลาเท่านั้น ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ปัญหาโดยการเตรียมแผ่น CD บทเรียน เพื่อ Run ไฟล์บทเรียนในเวลาที่เกิดปัญหาเกี่ยวกับอินเทอร์เน็ต

6. แม้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนจะต่ำกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ แต่อย่างไรก็ตามผู้วิจัยเห็นว่า นักเรียนให้ความสนใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงเป็นอย่างมาก เพราะเป็นระบบที่นักเรียนยังไม่เคยใช้ และสามารถช่วยในเรื่องการขาดแคลนครูได้นอกจากนี้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้น มีการฝึกการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อให้นักเรียนได้แก้ปัญหาเกี่ยวกับแคลคูลัสได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น โดยอาศัยทักษะการเชื่อมโยงความรู้ภายในวิชาคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน ซึ่งสอดคล้องกับ เทอดเกียรติ วงศ์สมบูรณ์ (2547: 50-51) และ ลิลลา คลภาค (2549: 63) ที่ได้ทดลองใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยง และพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยงของนักเรียนสูงขึ้น

2) ความพึงพอใจในการเรียน

จากการศึกษาความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ของนักเรียนในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ จำนวน 3 โรงเรียน ได้แก่ โรงเรียนกาบังพิทยาคม โรงเรียนบาเจาะ และโรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร” ผลปรากฏว่า นักเรียนมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) เท่ากับ 3.79 ซึ่งอยู่ในระดับมาก อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งสามารถอภิปรายผลได้ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนมีความพึงพอใจในด้านเนื้อหาวิชาและการสอนอยู่ในระดับมาก โดยมีความพึงพอใจในด้านความชัดเจนในการกำหนดเค้าโครงในการสอนมากที่สุด รองลงมาคือด้านความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน และความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน ทั้งนี้เนื่องมาจากบทเรียนนี้มีการกำหนดเค้าโครงในการสอนและวัตถุประสงค์ของบทเรียนและของรายหัวข้อย่อยไว้อย่างชัดเจน จึงทำให้การเรียนเป็นไปตามลำดับขั้นตอนอย่างเป็นระเบียบ และเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ซึ่งส่งผลให้นักเรียนเกิดความรู้ความเข้าใจในการเรียนมากขึ้น

2. นักเรียนมีความพึงพอใจในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) อยู่ในระดับมาก โดยมีความพึงพอใจในด้านการชี้แจงและให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงก่อนการเรียน รองลงมาคือ นักเรียนสามารถเข้ามาใช้ห้องเรียนเสมือนจริงในเวลาใดก็ได้ และ ความเหมาะสมของการวัดและประเมินผลการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ทั้งนี้เนื่องมาจาก ก่อนการจัดการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงนั้น ผู้วิจัยได้มีการจัดอบรมการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงให้แก่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดเพื่อให้มีความเข้าใจอย่างชัดเจนเกี่ยวกับการเรียนการสอนผ่านระบบ และจุดเด่นของการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงนี้คือ นักเรียนสามารถเข้ามาเรียนในเวลาใดก็ได้ เนื่องจากการเรียนผ่านระบบอินเทอร์เน็ต ดังนั้นเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจในบทเรียนก็สามารถกลับมาทบทวนที่หลังได้ หรือนักเรียนสามารถเข้าใจในบทเรียนเรื่องนั้นแล้วก็สามารถเรียนเนื้อหาในลำดับต่อไปได้นอกจากนี้ระบบห้องเรียนเสมือนจริงมีการบรรจุข้อสอบไว้ในระบบเพื่อการวัดและประเมินผลการเรียนของนักเรียน โดยนักเรียนสามารถทำข้อสอบผ่านระบบได้เลยเมื่อนักเรียนจบในในแต่ละส่วนของบทเรียนนั้น

3. นักเรียนมีความพึงพอใจในด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) มากกว่าด้านเนื้อหาวิชาและการสอน ทั้งนี้เนื่องจากการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือน

จริงนี้เป็นระบบการเรียนการสอนที่น่าสนใจ และเป็นสิ่งนักเรียนยังไม่เคยใช้ ระบบนี้เป็นระบบที่ทำให้ให้นักเรียนในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ได้เรียนกับครูผู้เชี่ยวชาญในการสอนคณิตศาสตร์โดยตรง ผ่านระบบอินเทอร์เน็ต นอกจากนี้ฟังก์ชันการทำงานของระบบมีประโยชน์ต่อการเรียนรู้ของนักเรียน เช่น ระบบสนทนา (Chat) กระดานถามตอบ การส่งงาน การวัดและประเมินผล และการเข้าเรียนในเวลาใดก็ได้ เป็นต้น และนักเรียนอาจพบว่าการเรียนการสอนด้วยวิธีนี้มีประสิทธิภาพมากกว่าการเรียนการสอนด้วยวิธีปกติที่นักเรียนเคยเรียนมา ดังที่ ระเบียบ นว ยะวงศ์ (2550: 54-55) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และพบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนด้วยวิธีปกติ

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. แม้ว่าการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงจะเป็นการเรียนการสอนผ่านระบบอินเทอร์เน็ต โดยที่ไม่ต้องอาศัยครูจริงก็ตาม แต่อย่างไรก็ตาม ในการเรียนการสอนนั้นก็ควรมีครูผู้ควบคุม เพื่อให้การเรียนการสอนเป็นไปอย่างมีระเบียบ และอำนวยความสะดวกเมื่อนักเรียนเกิดปัญหาในการเรียน นอกจากนี้ครูผู้ควบคุมควรกระตุ้นให้นักเรียนได้มีการอภิปรายร่วมกันเพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาร่วมกันบ้างในบางครั้ง ซึ่งจะทำให้ศักยภาพทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น
2. ผู้สอนควรตรวจใบงานทุกครั้ง เพื่อสังเกตข้อบกพร่องของนักเรียน และแจ้งผลกลับให้นักเรียนทราบผ่านระบบ เพื่อเป็นแรงจูงใจในนักเรียนเกิดความเพียรพยายามในการเรียนรู้ต่อไป

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงสำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆต่อไป
2. ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการเรียนการสอนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงในวิชาอื่นๆสำหรับโรงเรียนที่อยู่ในพื้นที่ที่ขาดแคลนครูในสาขาวิชานั้น

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ. (2544). *ทิศทางของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานศูนย์พัฒนาหลักสูตร*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2545). *หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- . (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- . (2545). *เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).
- กิดานนท์ มลิทอง. (2536). *เทคโนโลยีการศึกษาร่วมสมัย*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กั้ววล เทียนกัณฑ์เทศน์. (2540). *การวัด การวิเคราะห์ และการประเมินผลทางการศึกษาเบื้องต้น*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพฯ.
- คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. (2552). *ความหมายของห้องเรียนเสมือนจริง(Virtual Classroom).*, <http://cdezine.wordpress.com/2009/02/03>.
- ครรชิต มาลัยวงศ์. (2540). *ก้าวไกลไปกับคอมพิวเตอร์ : สารของคอมพิวเตอร์ที่ข้าราชการต้องรู้*. กรุงเทพฯ: ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์.
- จรรยา ภูอุดม. (2545, พฤษภาคม-กรกฎาคม). *แนวการจัดการเรียนการสอนและการประเมินผลที่สอดคล้องกับสาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์*. *วารสารคณิตศาสตร์*. 46(524-526): 14, 23-24.
- จิตติมา วงศ์วิวัฒน์. (2548). *การวิเคราะห์และออกแบบระบบ*. กรุงเทพฯ : เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า จำกัด.

- แจ่มจันทร์ ทองสา. (2544). การนำเสนอรูปแบบบทเรียนมัลติมีเดียตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (โสตทัศนศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ฉลองชัย สุรวัดนบุญ. (2528). การเลือกและการใช้สื่อการสอน. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อุดมธนา.
- ชนิดา รัชทรัพย์เมือง และคณะ (2548). สภาวะการขาดแคลนครูในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน. รายงานการวิจัย. กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชม ภูมิภาค. (2543). เทคโนโลยีเพื่อการศึกษา. เทคโนโลยีสื่อสารการศึกษา. ปีที่ 4 ฉบับที่ 1: 15-17.
- ชัยวัฒน์ เนือมั่ง. (2552). การพัฒนาสื่อการสอนห้องปฏิบัติการเคมีเสมือนใช้ในระบบ E-Learning. โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์: 6-14.
- ดวงเดือน อ่อนน่วม. (2533). การสอนซ่อมเสริมคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. กรมวิชาการ.
- ทรงชัย อักษรคิด. (2547, พฤศจิกายน-ธันวาคม - 2548, มกราคม). การส่งเสริมความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์. (554-556): 33-40.
- เทอดเกียรติ วงศ์สมบูรณ์. (2547). กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยง เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาณพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- นงลักษณ์ แก้วมาลา. (2547). ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องการแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- บุญเกื้อ ควรรหาเวช. (2542). นวัตกรรมการศึกษา. กรุงเทพฯ : ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- ปราณี ทองคำ. (2548). *สภาพการใช้และความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการเรียนการสอนในห้องเรียนเสมือน : กรณีศึกษารายวิชา 266-416 การวิจัยสำหรับครู*. สงขลา: ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). *ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิถีวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 12-15*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- . (2544-2545, พฤศจิกายน-มกราคม). *หยิบสิ่งรอบกายมาใช้เรียนรู้คณิตศาสตร์*. *วารสารคณิตศาสตร์*. 45(518-520): 56.
- มนตรี ดวงจิโน . (2554). *การสร้างเว็บเพจห้องเรียนเสมือนทางอินเทอร์เน็ต*. *วารสารวิทยบริการ*. ปีที่ 12 ฉบับที่ 2 (พฤษภาคม-สิงหาคม): 3-44.
- เมสินี นาคมนิ. (2548). *การวางแผนโครงการพัฒนาซอฟต์แวร์*. กรุงเทพฯ: เลโซนิก้า.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2536). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ถ่ายเอกสาร.
- ระเบียบ นีวะวงษ์. (2550). *พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนอัจฉริยะผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เรื่อง "กำหนดการเชิงเส้น" ในสถาบันราชภัฏ*. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม.(การวิจัยและพัฒนาท้องถิ่น). อุดรดิตถ์: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์.
- รุจโรจน์ แก้วอุไร. (2543). *การพัฒนาระบบการเรียนการสอนผ่านเครือข่ายใยแมงมุม*. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ลิลดา คลภาค. (2549). *กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. (2538). *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- . (2539). *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้*. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

วิกิพีเดีย สารานุกรม. (2548). *แคลคูลัส*. สืบค้นเมื่อ 1 พฤศจิกายน 2548, จาก <http://th.wikipedia.org/wiki/แคลคูลัส>.

ศรีบุตร แววจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). *การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์*. กรุงเทพฯ: วังตะวัน.

ศศิธร แก้วรักษา. (2547). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบซิปปา (CIPPA MODEL) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน เรื่อง สถิติเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2548). *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สมบัติ แสงทองคำสุก. (2545). *การพัฒนารูปแบบการสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สมเดช บุญประจักษ์. (2540). *การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สิริพร อภิวงษ์งาม. (2549). *การศึกษาแนวทางการออกแบบห้องเรียนเสมือนจริงตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสต์*. วิทยานิพนธ์. ศป.ม. (การออกแบบนิเทศศิลป์). กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศิลปากร.

สุดาพันธ์ จุลเอียด. (2552, พฤษภาคม-สิงหาคม). *การพัฒนาบทเรียนบนห้องเรียนเสมือนจริง. วารสารวิทยานิพนธ์*. 2(67-80).

- สุพัฒตรา หล้าฤทธิ. (2547). การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เน้นกระบวนการคิดแบบเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยการศึกษา). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.
- สุวัฒน์ ปุณณชัยยะ และคณะ. (2545). รอบรู้ *Internet* และ *World Wide Web*. กรุงเทพฯ: บริษัท โปรวิชั่น จำกัด.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2540). แผนพัฒนาการศึกษาแห่งชาติ ฉบับที่ 8 พ.ศ. 2540-2544. กรุงเทพฯ: สำนักนายกรัฐมนตรี.
- . (2544). การปฏิรูปการศึกษา: วาระแห่งชาติจากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ผู้การปฏิบัติ ยุทธศาสตร์ที่จะพาประเทศพ้นวิกฤต. กรุงเทพฯ: ภาพพิมพ์.
- อุทัย ภิรมย์รัตน์. (2540). โคมห้านามมหาวิทยาลัยในศตวรรษที่ 21. *สารศรีปทุม*. กุมภาพันธ์-พฤษภาคม: 21-30.
- โอภาส เอี่ยมสิริวงศ์. (2548). *ระบบฐานข้อมูล(Database System)*. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- Anderson, K.B.; & R.E., Pingry. (1973). *The Learning of Mathematics: The Theory and Practics*. Washington D.C.: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Barry Boehm. (1998). "A Stakeholder Win-Win Approach to Software Engineering Education". Published in the 20th conferences of software engineering.
- Balas, A.K. (2002, March 2). The Mathematics and Reading Connection. *ERIC Digest*. Retrieved May 14, 2003, from http://www.ericfacility.net/databases/ERIC_Digest/ed432439.html.
- Bischoff, j. (1997). *Data Warehouse*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall,inc.
- Buck, J.C. (2000, June). Building Connection among Classes of Polynomial Functions. *Mathematics Teacher*. 93(7): 591-594.

- Crites, T.W. (1995, August). Connecting Geometry and Algebra: Geometric Interpretations of Distance. *Mathematics Teacher*. 88(4): 292-297.
- Davis, W.S. (1994). *System Analysis and Design*. America: Wadsworth.
- Dossey, John A.; et al. (2002). *Mathematics Method and Modeling for Today's Mathematics Classroom. A Contemporary Approach to Teaching Grade 7-12*. Pacific Grove: BROOKS/COLE.
- Drexel, Robert Earl. (1997, July). Connecting Common and Decimal Fraction Concepts: A Common Fraction Perspective. *Dissertation Abstracts International*. 58(6): 2119-A.
- Eric, Knuth. (2000, July). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4): 500-508.
- Information Technology Association of America. (2000). *Bridging The Gap : Information Technology Skills for a new Millennium*. Arlington, VA: ITAA.
- Kennedy, Leonard M.; & Tipps, Steve. (1944). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. 7th ed. Belmont, California: Wadsworth.
- Kyle, D.W. McIntyre E.; & G.H. Moore. (2001 , October). Connecting Mathematics Instruction with the Families of Young Children. *Teaching Children Mathematics*. 8(2): 80-86.
- Lawson, Michael J.; & Mohan Chinnappan. (2000, January). Knowledge Connectedness in Geometry Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(1): 26-43.
- Malkevitch, J. (2003, May 10). *Mathematics and Art*. Retrieved May 14, 2003, from <http://www.ams.org/new-in-math/cover/art4.html>.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM, Inc.
- , (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM, Inc.
- Pandiscio, Eric A. (2002, May). Exploring the Link Between Preservice Teachers' Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software. *School Science and Mathematics*. 102(5): 216-221.
- Pugalee, David K. (2001, May). Writing, Mathematics, and Metacognition: Looking for Connections Through Students' Work in Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics*. 101(5): 236-243.
- Sommerville. (2001). *Lan , Software Engineering*. 6th Edition, America : Addison-Wesley.
- Williams, Susan Elain. (1999, May). Effects of Teacher Involvement in Curriculum Development on the Implementation of Calculators (Mathematics Curriculum). *Dissertation Abstracts International*. 53(11): 3836-A.
- Yourdon, E., And L.L. Constantine. (1979). *Structured Design*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-half.

ภาคผนวก

รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภา ชธิกุล
 อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
 คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร
 มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา
2. อาจารย์สุจินันท์ บุญพัฒน์
 ครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
 โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม)
3. อาจารย์สุนีย์ เวชพรหมณ์
 ครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
 โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
4. อาจารย์อับดุลอาซิส อับดุลวาฮับ
 อาจารย์ประจำภาควิชาบรรณารักษศาสตร์และสารนิเทศศาสตร์
 คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์
 มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

30 มีนาคม พ.ศ. 2554

เรื่อง ขออนุญาตเป็นผู้อนุมัติตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภา ยธิกุล

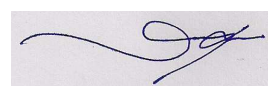
สิ่งที่ส่งมาด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
3. แบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ด้วยข้าพเจ้า นางลิลลา อดุลยศาสตร์ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา และคณะวิจัยได้ทำวิจัยเรื่อง “การพัฒนาแบบแผนการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้” เนื่องจากท่านเป็นผู้ที่มีความรู้และเชี่ยวชาญเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย ข้าพเจ้าจึงขออนุญาตท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัยซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และแบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ขอขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาอนุญาต

ขอแสดงความนับถือ



(นางลิลลา อดุลยศาสตร์)

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

30 มีนาคม พ.ศ. 2554

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์สุรินทร์ บุญพัฒนาภรณ์

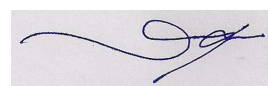
สิ่งที่ส่งมาด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
3. แบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ด้วยข้าพเจ้า นางลิลลา อดุลยศาสน์ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา และคณะวิจัยได้ทำวิจัยเรื่อง “การพัฒนาแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้” เนื่องจากท่านเป็นผู้ที่มีความรู้และเชี่ยวชาญเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย ข้าพเจ้าจึงขอความอนุเคราะห์ท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัยซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และแบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ขอขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ



(นางลิลลา อดุลยศาสน์)

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

30 มีนาคม พ.ศ. 2554

เรื่อง ขอบความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ศุณีย์ เวชพราหมณ์

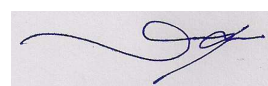
สิ่งที่ส่งมาด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
3. แบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

ด้วยข้าพเจ้า นางลิลลา อุดลยศาสตร์ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา และคณะวิจัยได้ทำวิจัยเรื่อง “การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้” เนื่องจากท่านเป็นผู้ที่มีความรู้และเชี่ยวชาญเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย ข้าพเจ้าจึงขอความอนุเคราะห์ท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัยซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และแบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง ขอขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ



(นางลิลลา อุดลยศาสตร์)

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

30 มีนาคม พ.ศ. 2554

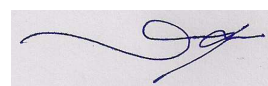
เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์อับดุลอาซิส อับดุลวาฮับ

ด้วยข้าพเจ้า นางลิลลา อุดลยศาสน์ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา และคณะวิจัยได้ทำวิจัยเรื่อง “การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้” เนื่องจากท่านเป็นผู้ที่มีความรู้และเชี่ยวชาญเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย ข้าพเจ้าจึงขอความอนุเคราะห์ท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัยซึ่งเป็นระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ขอขอบคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ



(นางลิลลา อุดลยศาสน์)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แผนการจัดการเรียนรู้และใบงาน

เรื่อง

แคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัส (เน้นทักษะการเชื่อมโยง) ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ชั่วโมง	ชั่วโมง ที่
0	ปฐมนิเทศก่อนเรียน		1	1
1	ลิมิตของฟังก์ชัน	1.1 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มี ลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่ 1.2 หาขีดจำกัด ลิมิตขวา และลิมิตของ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ใน รูปกราฟ 1.3 หาขีดจำกัด ลิมิตขวา และลิมิตของ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูป สมการ	3	2, 3, 4
2	ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ของฟังก์ชัน	2.1 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มี ลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่ 2.2 หาขีดจำกัดของฟังก์ชันโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับ ลิมิตได้ 2.3 หาขีดจำกัดของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบ และใช้คู่สังยุคได้	3	5, 6, 7
3	ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	3.1 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่ เพราะเหตุใด 3.2 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็น ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่	3	8, 9, 10

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ชั่วโมง	ชั่วโมง ที่
สอบครั้งที่ 1 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน			1	11
4	ความชันของเส้นโค้ง	4.1 หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้ 4.2 หาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้	2	12, 13
5	อนุพันธ์ของฟังก์ชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง	5.1 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามได้ 5.2 ใช้บทนิยามของอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันในการแก้โจทย์ปัญหาได้	4	14, 15, 16, 17
6	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร	6.1 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร เมื่อกำหนดฟังก์ชันพีชคณิตให้ได้ 6.2 นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	4	18, 19, 20, 21
7	อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง	7.1 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบโดยใช้กฎลูกโซ่ได้ 7.2 หาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันได้ 7.3 นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้	3	22, 23, 24
8	การประยุกต์ของอนุพันธ์	8.1 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และสามารถนำความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ได้ 8.2 บอกความหมายของค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งหาค่าดังกล่าวได้ 8.3 หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้ 8.4 หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ	5	25, 26, 27, 28, 29

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ชั่วโมง	ชั่วโมง ที่
		ฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 8.5 นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้		
สอบครั้งที่ 2 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์			2	30, 31
9	ปฏิยานุพันธ์	9.1 บอกความหมายของปฏิยานุพันธ์ได้ 9.2 หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	2	32, 33
10	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	10.1 บอกความหมายของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ 10.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ 10.3 บอกสูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้ 10.4 หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้ 10.5 นำความรู้เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	2	34, 35
11	ปริพันธ์จำกัดเขต	11.1 บอกสัญลักษณ์ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้ 11.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้ 11.3 หาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้	3	36, 37, 38
12	พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	12.1 บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้ 12.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้	2	39, 40

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้	จำนวน ชั่วโมง	ชั่วโมง ที่
		12.3 หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้		
สอบครั้งที่ 3 เรื่องปฏิกิริยาพันธะของฟังก์ชันและการประยุกต์			2	41, 42
			42	

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ให้ a และ L เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มีลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
2. หาขีดจำกัดซ้าย ขีดจำกัดขวา และลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าขีดจำกัดหาได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปกราฟ
3. หาขีดจำกัดซ้าย ขีดจำกัดขวา และลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าขีดจำกัดหาได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปสมการ

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ ซื่อสัตย์

6. มีวิจารณ์ญาณ

สาระการเรียนรู้

ลิมิตของฟังก์ชัน

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนดังนี้ “แคลคูลัสเป็นสาระการเรียนรู้ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ อาทิเช่น การเจริญเติบโตของร่างกายในแต่ละวัน การเพิ่มหรือลดของผลเมืองในแต่ละพื้นที่ การเกิดและการตายของพืชและสัตว์ การเคลื่อนที่ของวัตถุ และการเกิดปฏิกิริยาเคมีต่าง ๆ โดยในบทเรียนนี้จะเริ่มต้นจากการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งถือเป็นหัวใจสำคัญของแคลคูลัส”
2. จากนั้น ครูทบทวนความรู้พื้นฐานโดยการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างลิมิตของฟังก์ชันกับความรู้เรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ โดเมนและเรนจ์ และกราฟของฟังก์ชันที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว ดังรายละเอียดต่อไปนี้

“ในการศึกษาลิมิตของฟังก์ชันนั้น นักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ซึ่งครูจะทบทวนให้พอสังเขป ดังนี้

ความสัมพันธ์ คือ เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ โดยที่สมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของคู่อันดับสัมพันธ์กันอย่างไรอย่างหนึ่ง เช่น มากกว่า น้อยกว่า เป็นสองเท่า เป็นต้น

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจะจับคู่หรือมีความสัมพันธ์กับสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับได้เพียงสมาชิกเดียว

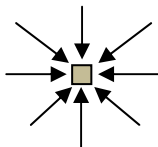
โดเมน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

เรนจ์ คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

ชนิดของฟังก์ชัน ฟังก์ชันที่ถูกนำไปใช้บ่อย ๆ และนักเรียนควรรู้จัก ได้แก่ ฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ ฟังก์ชันขั้นบันได ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น ซึ่งสิ่งที่เราจะเรียนกันในตอนนี้ เป็นการเชื่อมโยงระหว่างลิมิตกับฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ โดยศึกษาว่า ขณะที่ x ซึ่งเป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่งแล้ว ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่าใด ”

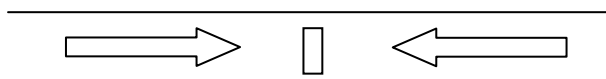
ขั้นการจัดการเรียนรู้

- ครูเริ่มต้นด้วยการอธิบายคำว่า “เข้าใกล้” ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาเรื่องลิมิต โดยการยกตัวอย่างสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน เพื่อสร้างความสนใจของนักเรียน ดังนี้
 - นักเรียนเคยสังเกตการเดินทางของมดเพื่อเข้าใกล้น้ำตาลก้อนหนึ่งที่วางอยู่บนพื้นหรือไม่ว่ามีลักษณะอย่างไร



จะเห็นว่า การเข้าใกล้ดังกล่าวมาจากหลายทิศทาง

- แต่สำหรับการเคลื่อนที่ของรถยนต์เพื่อเข้าใกล้หอนาฬิกาบนถนนสายหนึ่ง จะเป็นดังรูป



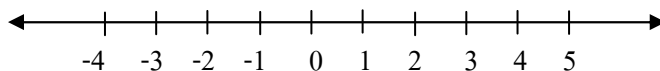
ซึ่งสามารถเชื่อมโยงกับคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ การเข้าใกล้จุดหนึ่ง ๆ บนระนาบจะมีได้หลายทิศทาง แต่การเข้าใกล้บนเส้นจำนวนมีได้เพียง 2 ทิศทางเท่านั้นคือทางซ้ายกับทางขวา

- ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า “ค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง จะเข้าใกล้ค่าใด ขณะที่ x เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง” จากตัวอย่างดังต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1 ประกอบคำอธิบายของครู

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $f(x) = 2x - 1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

ครูอธิบายว่า “ตัวอย่างนี้เป็นการเชื่อมโยงเรื่องลิมิตกับฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = 2x - 1$ นั่นคือเราจะพิจารณาว่า ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ เข้าใกล้จำนวนจริงใด เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งนำไปสู่การให้ความหมายของคำว่า “ลิมิต” ดังรายละเอียดต่อไปนี้

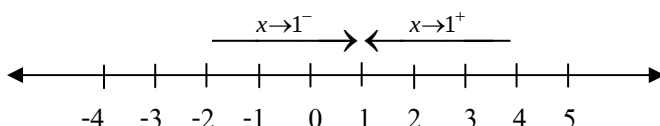
ก่อนอื่น ครูให้นักเรียนทำความเข้าใจความหมายของคำว่า x เข้าใกล้ 1 โดยการลากเส้นจำนวนดังรูป (เชื่อมโยงกับเรื่องระบบจำนวนจริง)



จากเส้นจำนวน นักเรียนจะเห็นว่าจำนวนจริง x ที่เข้าใกล้ 1 เป็นไปได้ 2 กรณีคือ

กรณี 1 : จำนวนจริง x ที่มีค่ามากกว่า 1 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งเรียกว่า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow 1^+$

กรณี 2 : จำนวนจริง x ที่มีค่าน้อยกว่า 1 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งเรียกว่า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow 1^-$

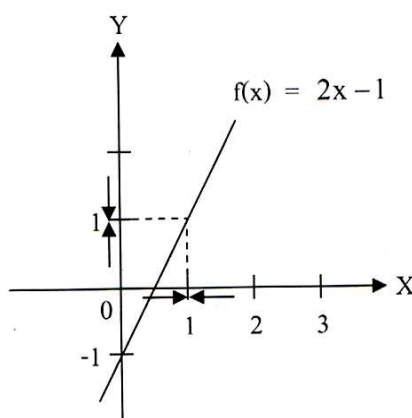


วิธีทำ ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $f(x) = 2x - 1$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ซึ่งควรได้ผลดังนี้

x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา											
x	0	0.5	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.5	2
$f(x)$	-1	0	0.8	0.98	0.998	?	1.002	1.02	1.2	2	3
$f(x)$ เข้าใกล้ 1 $f(x)$ เข้าใกล้ 1											

(เชื่อมโยงกับเรื่องกราฟของฟังก์ชัน และเรขาคณิตวิเคราะห์)

จากนั้นครูให้นักเรียนทดลองเขียนกราฟดูว่าจะได้กราฟเป็นรูปอย่างไร จากนั้น ครูนำกราฟ
ถูกต้องมาแสดง ดังรูป



ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในตารางและกราฟ ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทาง
ด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เพียงค่าเดียว

ในกรณีนี้ จะกล่าวว่า “ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 1” เขียนแทน
ด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$

3. ครูนำเสนอตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $f(x) = x^2 - 4x + 5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

วิธีทำ ครูอธิบายว่า “ตัวอย่างนี้เป็นการเชื่อมโยงเรื่องลิมิตกับฟังก์ชันกำลังสองที่เรียกว่า
ฟังก์ชันพาราโบลา (ฟังก์ชันที่มีรูปแบบทั่วไปเป็น $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$)”

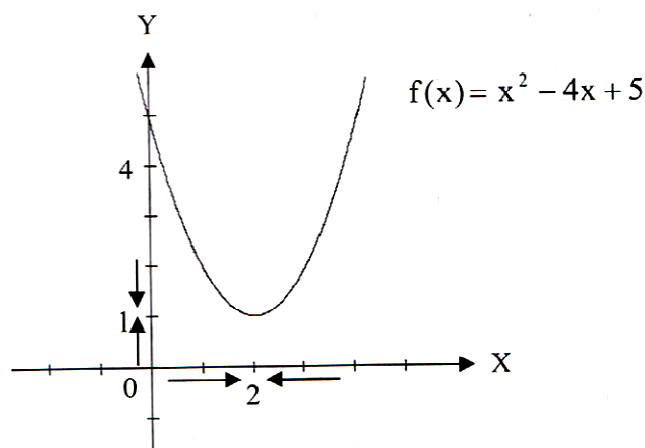
จากนั้น ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $f(x) = x^2 - 4x + 5$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ซึ่งควรได้ผลดังนี้

□ □		x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย				x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา		□ □	
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1		
$f(x)$	1.01	1.0001	1.000001	?	1.000001	1.0001	1.01		
□ □		$f(x)$ เข้าใกล้ 1				$f(x)$ เข้าใกล้ 1		□ □	

ครูให้นักเรียนทดลองเขียนกราฟดูว่าจะได้กราฟเป็นรูปอย่างไร โดยครูแนะนำวิธีการเขียนกราฟของพาราโบลา ดังนี้ “การเขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ทำได้หลายวิธี นักเรียนอาจกำหนดค่า x แล้วหาค่า y เพื่อนำคู่อันดับ (x, y) ที่ได้ไปเขียนกราฟ แต่วิธีนี้ไม่สะดวกมากนัก ซึ่งนักเรียนอาจใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์มาช่วยในการเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ จะได้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\
 &= \left(x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{-4}{2} \right)^2 + 5 \\
 &= (x^2 - 4x + 2^2) - 4 + 5 \quad ; \quad \left(\frac{-4}{2} \right)^2 = (-2)^2 = (2)^2 \\
 &= (x - 2)^2 + 1
 \end{aligned}$$

นั่นคือ พาราโบลานี้มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(2, 1)$ ” จากนั้น ครูนำกราฟที่ถูกต้องมาแสดง ดังรูป



(เชื่อมโยงกับเรื่องกราฟพาราโบลา และกำลังสองสมบูรณ์)

ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในตารางและกราฟ ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เพียงค่าเดียว

ในกรณีนี้ จะกล่าวว่า “ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4x + 5$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 1” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $f(x) = |x|$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0

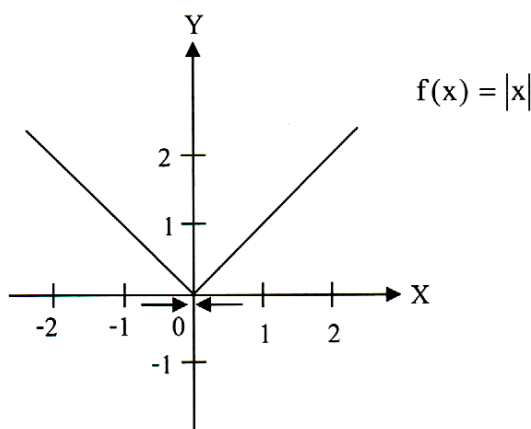
วิธีทำ ครูอธิบายว่า ตัวอย่างนี้เป็นการเชื่อมโยงเรื่องลิมิตกับฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่) โดยนักเรียนต้องรู้นิยามของค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

จากนั้น ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $f(x) = |x|$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ซึ่งควรได้ผลดังนี้

x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย				x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา			
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.1	0.01	0.001	?	0.001	0.01	0.1
f(x) เข้าใกล้ 0				f(x) เข้าใกล้ 0			

ครูให้นักเรียนทดลองเขียนกราฟดูว่าจะได้กราฟเป็นรูปอย่างไร จากนั้น ครูนำกราฟที่ถูกต้องมาแสดง ดังรูป



(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์)

ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในตารางและกราฟ ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เพียงค่าเดียว

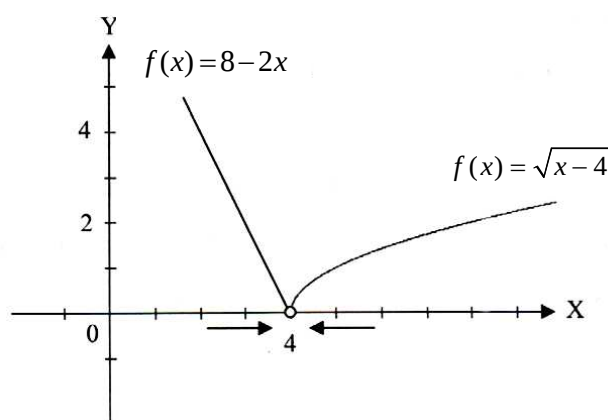
ในกรณีนี้ จะกล่าวว่า “ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=|x|$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 มีค่าเท่ากับ 0” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & ; x > 4 \\ 8-2x & ; x < 4 \end{cases}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4

วิธีทำ ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 4 (อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณได้) ซึ่งควรได้ผลดังนี้

x เข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย				x เข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา			
x	3.99	3.999	3.9999	4	4.001	4.01	4.1
f(x)	0.02	0.002	0.0002	?	0.0316	0.1	0.316
f(x) เข้าใกล้ 0				f(x) เข้าใกล้ 0			

ครูให้นักเรียนทดลองเขียนกราฟดูว่าจะได้กราฟเป็นรูปอย่างไร จากนั้น ครูนำกราฟที่ถูกต้องมาแสดง ดังรูป



(เชื่อมโยงกับเรื่องระบบจำนวนจริง(การหารากที่สอง) กราฟของเส้นตรงและพาราโบลา)

ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในตารางและกราฟ ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เพียงค่าเดียว

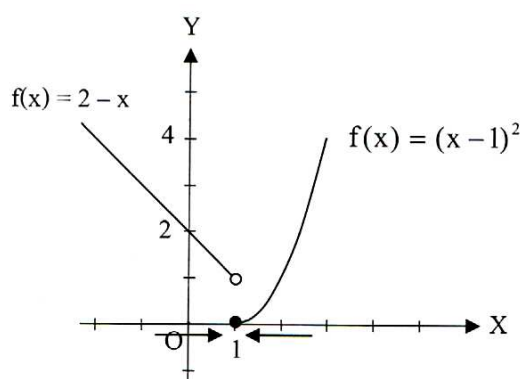
ในกรณีนี้ จะกล่าวว่า “ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & ; x > 4 \\ 8-2x & ; x < 4 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 4 มีค่าเท่ากับ 0” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; x < 1 \\ (x-1)^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

วิธีทำ ครูให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ซึ่งควรได้ผลดังนี้

x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย				x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา			
x	0.99	0.999	0.9999	1	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.01	1.001	1.0001	?	0.000001	0.0001	0.01
f(x) เข้าใกล้ 1				f(x) เข้าใกล้ 0			

ครูให้นักเรียนทดลองเขียนกราฟดูว่าจะได้กราฟเป็นรูปอย่างไร จากนั้น ครูนำกราฟที่ถูกต้อง มาแสดง ดังรูป



(เชื่อมโยงกับเรื่องกราฟของเส้นตรงและพาราโบลา)

ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในตารางและกราฟ ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0

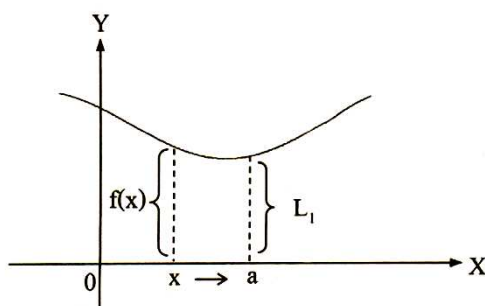
ในกรณีนี้ จะกล่าวว่า “ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; x < 1 \\ (x-1)^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$ ไม่มีลิมิตที่ $x=1$ ” และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

4. จากตัวอย่างทั้ง 5 ข้อ โครงสร้างลิมิตของฟังก์ชันในกรณีทั่วไปดังนี้

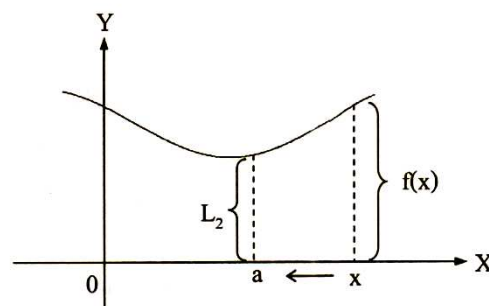
“สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เรียก L_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$

และถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวา เรียก L_2 ว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะได้ว่า “ฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น L เมื่อ x เข้าใกล้ a ” นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะได้ว่า “ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ a ” นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้”

นอกจากนี้ สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ อาจเขียนแทนด้วย

$$f(x) \rightarrow L \text{ เมื่อ } x \rightarrow a$$

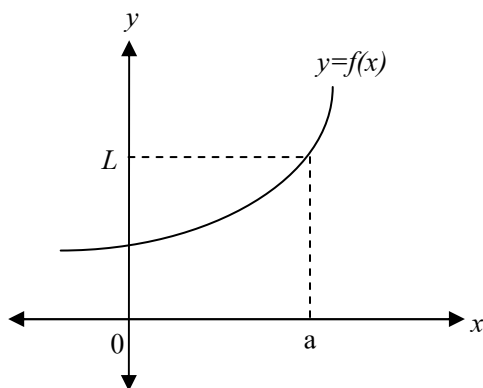
ซึ่งอ่านว่า “ $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ”

5. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ จะถือเป็นข้อตกลงว่า “ $f(x)$ เข้าใกล้ L ” หมายถึง ค่าของ $f(x)$ อาจจะเป็น L หรือเข้าใกล้ L ก็ได้ แต่ “ x เข้าใกล้ a ” หมายถึง x เข้าใกล้ a โดยที่ $x \neq a$ เท่านั้น

ดังนั้น ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น เราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า เข้าใกล้จำนวนจริงค่าใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ นั้นหมายความว่า เราจะไม่พิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x = a$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f อาจนิยามหรือไม่นิยามที่ $x=a$ ก็ได้ แต่อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชัน f จะต้องนิยามที่แต่ละจุดที่ใกล้ a ”

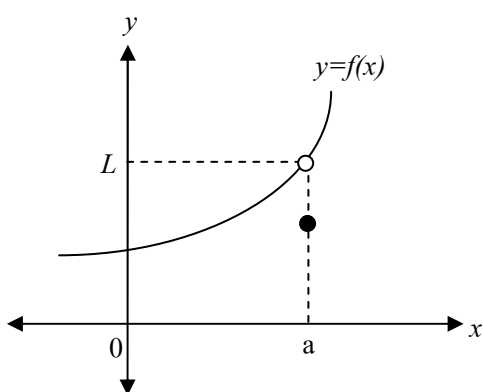
6. ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟของฟังก์ชัน และใช้คำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียนดังนี้



จากรูป $f(a)$ มีค่าเท่ากับ L

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

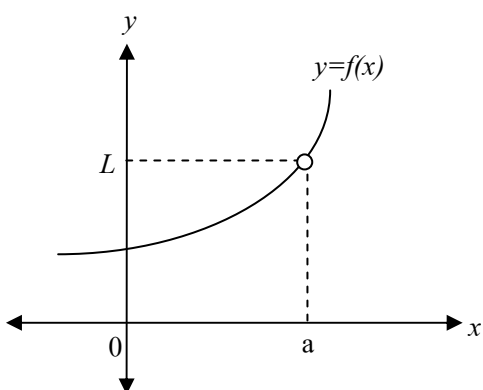
และสอดคล้องกับตัวอย่าง 1, 2 และ 3



จากรูป $f(a)$ มีค่าเท่ากับ L หรือไม่ (ไม่)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

และสอดคล้องกับตัวอย่าง 5



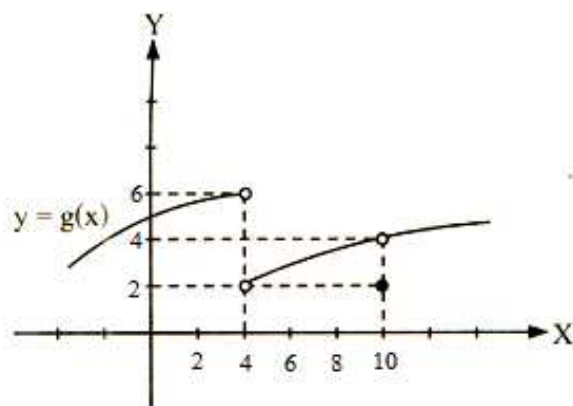
จากรูป $f(x)$ นิยามที่ $x=a$ หรือไม่ (ไม่)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

และสอดคล้องกับตัวอย่าง 4

7. กรุณาสอนตัวอย่างที่ 6 และ 7 โดยให้นักเรียนลงมือทำด้วยตัวเอง จากนั้นครูเฉลยคำตอบพร้อมอธิบายดังนี้

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ให้ดังนี้



จงหา

- 1) $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 10^-} g(x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 10^+} g(x)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 10} g(x)$
- 7) $g(10)$

วิธีทำ

- 1) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย ($x < 4$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 6
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = 6$
- 2) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา ($x > 4$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 2
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = 2$
- 3) เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ หาค่าไม่ได้
- 4) เมื่อ x เข้าใกล้ 10 ทางด้านซ้าย ($x < 10$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 4
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 10^-} g(x) = 4$
- 5) เมื่อ x เข้าใกล้ 10 ทางด้านขวา ($x > 10$) จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 4
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 10^+} g(x) = 4$
- 6) เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 10^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} g(x) = 4$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 10} g(x) = 4$
- 7) $g(10) = 2$

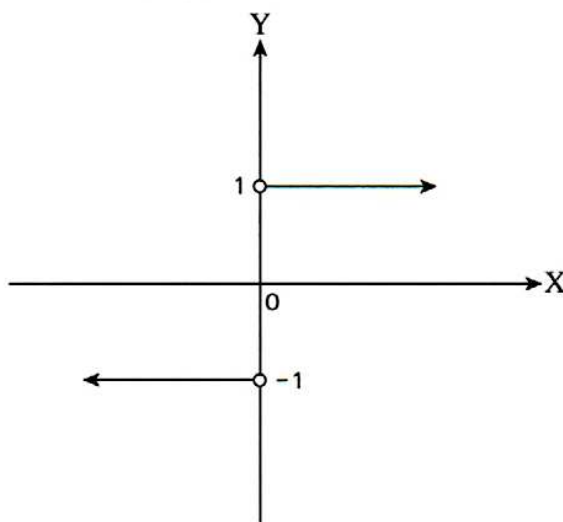
ตัวอย่างที่ 7 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \qquad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \qquad 3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

วิธีทำ จากนิยามของค่าสัมบูรณ์ $|x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & ; x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

ซึ่งสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



ดังนั้น $1) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$3) \text{ เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ $x=0$

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปเรื่องลิมิตของฟังก์ชันดังนี้ “การพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง จะพิจารณาเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a ใด ๆ ใน 2 กรณี คือ

- x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ หรือ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow a^-$
- x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ หรือ x เข้าใกล้ a ทางขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow a^+$

ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย เรียก L_1 ว่า “ลิมิตซ้ายของ f ที่ a ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$

และถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา เรียก L_2 ว่า “ลิมิตขวาของ f ที่ a ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ a

2. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำใบงานที่ 1 เป็นการบ้าน

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1
2. ใบงานที่ 1
3. ห้องเรียนเสมือน
4. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
5. กวีนา นาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2548.
6. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
7. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
8. ศุภกิจ เจริญวิศุทธิ์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 1 - การทำใบงานที่ 1 - การทำแบบทดสอบที่ 1 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	- ใบความรู้ที่ 1 - ใบงานที่ 1 - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 1 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 <u>ผ่าน</u> - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 <u>ผ่าน</u>
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อ ส่งใบงานตรงเวลาและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน <u>ผ่าน</u>



ใบงานที่ 1

ลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัยการหาค่าของฟังก์ชันเดิมในตารางที่กำหนดให้ (อนุญาตให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคิดคำนวณได้)

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-1}{x-4}$

x	3.9	3.99	3.999
f(x)			

x	4.001	4.01	4.1
f(x)			

จากตาราง หา $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-1}{x-4}$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

x	1.9	1.99	1.999
f(x)			

x	2.001	2.01	2.1
f(x)			

จากตาราง หา $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$			

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$			

จากตาราง หา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$f(x)$					

x	-1	-0.5	-0.1	-0.05	-0.01
$f(x)$					

จากตาราง หา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$					

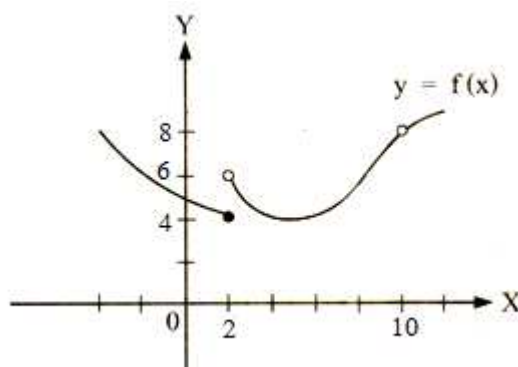
จากตาราง หา $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

.....

.....

.....

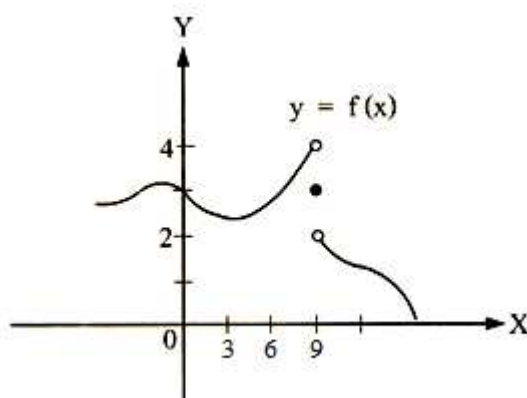
2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \dots\dots\dots$
- (5) $f(10) = \dots\dots\dots$

3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังแสดงในรูป



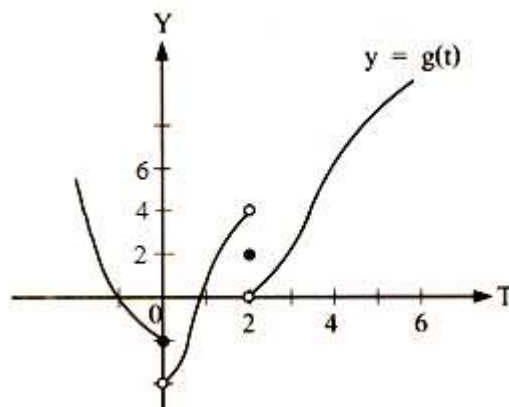
จงหา

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \dots\dots\dots$

(4) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \dots\dots\dots$

(5) $f(9) = \dots\dots\dots$

4. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = g(t)$ ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

(1) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = \dots\dots\dots$

(2) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \dots\dots\dots$

(3) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \dots\dots\dots$

(4) $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \dots\dots\dots$

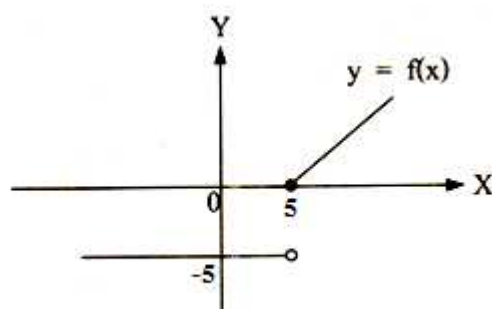
(5) $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = \dots\dots\dots$

(6) $\lim_{t \rightarrow 2} g(t) = \dots\dots\dots$

(7) $g(2) = \dots\dots\dots$

(8) $\lim_{t \rightarrow 5} g(t) = \dots\dots\dots$

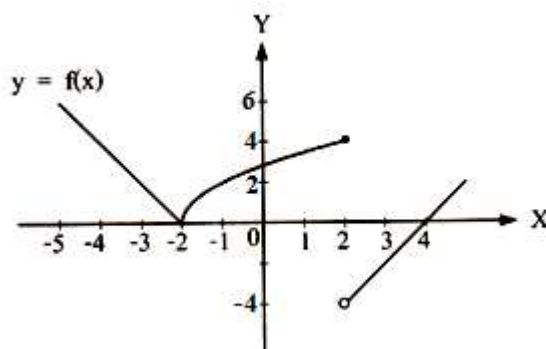
5. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้



จงหา

- (1) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots\dots\dots$

6. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้



จงหา

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \dots\dots\dots$
- (5) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- (6) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \dots\dots\dots$

7. โดยอาศัยการเขียนกราฟของฟังก์ชัน จงหา

(1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + x)$

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2 + x$ ได้ดังนี้

จากกราฟ จะได้ว่า

.....

.....

.....

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ เมื่อ } f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \leq 3 \\ 2 & ; x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ดังนี้

จากกราฟ จะได้ว่า

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2
เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a , L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ แล้วจะได้ว่า

- 1.1 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- 1.2 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- 1.3 $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$
- 1.4 $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL_1$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- 1.5 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$
- 1.6 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$
- 1.7 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2$
- 1.8 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2 \neq 0$
- 1.9 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n$ เมื่อ $n \in I^+$
- 1.10 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ และ $\sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)} \text{ สำหรับจำนวนจริง } a \text{ ใด ๆ ที่ } q(a) \neq 0$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มีลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
2. หาลิมิตของฟังก์ชันโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
3. หาลิมิตของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบและใช้คู่สังยุคได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ภายในวิชาคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ความซื่อสัตย์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจารณญาณ

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

ครูนำเข้าสู่บทเรียนดังนี้ “ในบางครั้งการหาลิมิตของฟังก์ชัน โดยการใช้กราฟหรือการคำนวณค่าของฟังก์ชันดังเช่นที่เราได้เรียนในคาบที่ผ่านมา นั้นไม่สะดวก โดยทั่วไปจะใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งนักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้เป็นอย่างดีเกี่ยวกับฟังก์ชัน สมบัติของระบบจำนวนจริง และสมบัติของเลขยกกำลัง”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครุณาเสนอทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a, L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ แล้วจะได้ว่า

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 1} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5 \\ & \lim_{x \rightarrow 1} (-9) = -9 \end{aligned} \quad \text{(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันคงตัวและระบบจำนวนจริง)}$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 2} \quad & \lim_{x \rightarrow 1/2} x = \frac{1}{2} \\ & \lim_{y \rightarrow 14} y = 14 \end{aligned} \quad \text{(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนามและระบบจำนวนจริง)}$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{เมื่อ } n \in I^+$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 3} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 3^4 = 81 \\ & \lim_{p \rightarrow (-1)} p^6 = (-1)^6 = 1 \end{aligned} \quad \text{(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนามและสมบัติของเลขยกกำลัง)}$$

กำลัง)

$$1.4 \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL_1 \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 4} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} 9x = 9 \lim_{x \rightarrow 3} x = 9(3) = 27 \\ & \lim_{p \rightarrow 5} (-7p^2) = (-7) \lim_{p \rightarrow 5} p^2 = (-7) \times 5^2 = (-7) \times 25 = -175 \end{aligned} \quad \text{(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)}$$

$$1.5 \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง 5} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (2x^4 + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} 3 \\ & = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} 3 \\ & = 2(1^4) + 3 = 2 + 3 = 5 \end{aligned} \quad \text{(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)}$$

$$1.6 \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวอย่าง 6} \quad \lim_{x \rightarrow 7} (3x^2 - x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 7} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 7} x - \lim_{x \rightarrow 7} 1 \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 7} x^2 - \lim_{x \rightarrow 7} x - \lim_{x \rightarrow 7} 1 \\
 &= 3(7^2) - 7 - 1 \\
 &= 139
 \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

$$1.7 \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวอย่าง 7} \quad \lim_{q \rightarrow 10} (3q^2 \cdot 2q) &= \lim_{q \rightarrow 10} 3q^2 \cdot \lim_{q \rightarrow 10} 2q \\
 &= 3 \lim_{q \rightarrow 10} q^2 \cdot 2 \lim_{q \rightarrow 10} q \\
 &= 3(10^2) \cdot 2(10) \\
 &= 300 \cdot 20 \\
 &= 6000
 \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

หรืออาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง ก็ได้

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow 10} (3q^2 \cdot 2q) &= \lim_{q \rightarrow 10} 6q^3 \\
 &= 6 \lim_{q \rightarrow 10} q^3 \\
 &= 6(10^3) \\
 &= 6000
 \end{aligned}$$

$$1.8 \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{เมื่อ } L_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวอย่าง 8} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6}{2x^3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^6}{\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^6}{2 \lim_{x \rightarrow -2} x^3} \\
 &= \frac{(-2)^6}{2(-2)^3} = \frac{64}{-16} = -4
 \end{aligned}$$

หรืออาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง ก็ได้

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^6}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2} x^3 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -2} x^3 = \frac{1}{2} (-2)^3 = -4$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

$$1.9 \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L_1^n \quad \text{เมื่อ } n \in I^+$$

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวอย่าง 9} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-4)^3 &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x-4) \right)^3 \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 4 \right)^3 \\
 &= (1-4)^3 = (-3)^3 = -27
 \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

$$1.10 \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ - \{1\}, \sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R} \quad \text{และ} \quad \sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ตัวอย่าง 10} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 5} x^2} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

2. กรุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนลงมือทำด้วยตัวเองก่อน จากนั้นครูเฉลยวิธีทำที่ถูกต้อง

$$\text{ตัวอย่างที่ 11} \quad \text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 3x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \quad (\text{ท.บ. 1.5 และ 1.6})$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \quad (\text{ท.บ. 1.4})$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad (\text{ท.บ. 1.1, 1.2 และ 1.3})$$

$$= 39$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) = 39$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

$$\text{ตัวอย่างที่ 12} \quad \text{จงหา } \lim_{x \rightarrow -1} (x+3)(x^2+2)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow -1} (x+3)(x^2+2) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) \times \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+2) \quad (\text{ท.บ. 1.7})$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 3 \right) \left(\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 2 \right) \quad (\text{ท.บ. 1.5})$$

$$= ((-1)+3)((-1)^2+2) \quad (\text{ท.บ. 1.1, 1.2, 1.3})$$

$$= 2 \times 3 = 6$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x+3)(x^2+2) = 6$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (5 - 3x)}$ (ท.บ. 1.8)

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 1}{\lim_{x \rightarrow -2} 5 - \lim_{x \rightarrow -2} 3x}$$
 (ท.บ. 1.5, 1.6)

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$
 (ท.บ. 1.1-1.4)

$$= -\frac{1}{11}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = -\frac{1}{11}$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันตรรกยะ ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

หมายเหตุ ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ โดยที่

$g(x)$ และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $h(x) \neq 0$

3. กรุณาเสนอทฤษฎีบทที่ 2 พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - 3x + 4$

วิธีที่ 1 (โดยใช้ทฤษฎีบท 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 4 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 4 \\ &= 2(1^3) - 3(1) + 4 = 3 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 (โดยใช้ทฤษฎีบท 2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - 3x + 4 = 2(1^3) - 3(1) + 4 = 3$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันพหุนาม ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

จากทฤษฎีบท 2 จะเห็นว่า ในการหาขีดจำกัดของฟังก์ชันพหุนาม เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น สามารถหาขีดจำกัดได้ โดยการแทนค่า x ในฟังก์ชันพหุนามด้วย a ดังตัวอย่างที่ 14 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า การใช้ทฤษฎีบท 2 ทำได้สะดวกและรวดเร็วกว่า แต่ให้ผลลัพธ์เท่ากับใช้ทฤษฎีบท 1

4. กรุณาเสนอทฤษฎีบทที่ 3 พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
 เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$$
 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ที่ $q(a) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 15 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x + 5}{x^2 - 3}$

วิธีทำ
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x + 5}{x^2 - 3} = \frac{2(1^3) - 1 + 5}{1^2 - 3} = -3$$

(เชื่อมโยงกับเรื่องฟังก์ชันตรรกยะ ระบบจำนวนจริงและสมบัติของเลขยกกำลัง)

5. กรุณาอธิบายต่อไปว่า ในกรณีที่ต้องการหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ แต่ค่าของ $f(a)$ หาค่าไม่ได้ เช่น $f(a)$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0$ ซึ่งทั้งหมดนี้เรียกว่ารูปแบบที่กำหนดค่าไม่ได้ (indeterminate form) แต่การจัดรูปของฟังก์ชันตรรกยะ โดยการเชื่อมโยงกับความรู้ต่อไปนี้

1. การแยกตัวประกอบเพื่อกำจัดส่วนที่เป็นศูนย์ (โดยครูทบทวนสูตรที่ใช้บ่อย นักเรียนควรจำ)

สูตรที่ควรจำ

1. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2. การใช้คู่สังยุค (conjugate)

ความรู้พื้นฐาน $(\sqrt{a})^2 = a$

3. การคูณและหารด้วยนิพจน์เดียวกัน

จะช่วยให้หาขีดจำกัดของฟังก์ชันนั้นได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 16 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right]$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสอง ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบเป็น $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} && \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ &= (x+1) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

ตัวอย่างที่ 17 จงหา $\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x^3 + 8}{x + 2} \right]$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของผลบวกกำลังสาม ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบเป็น

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x^3 + 8}{x + 2} \right] &= \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) \\ &= (-2)^2 - 2(-2) + 4 \\ &= 4 + 4 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x^3 + 8}{x + 2} \right] = 12$$

ตัวอย่างที่ 18 จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right]$

$$\text{วิธีทำ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(x+2) - 2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(เชื่อมโยงกับเรื่อง ระบบจำนวนจริงและการใช้คู่สังยุค)

6. ครูอธิบายเพิ่มเติมอีกว่า สำหรับบางฟังก์ชันใช้การเปลี่ยนรูปเพียงครั้งเดียว อาจไม่เพียงพอกับโจทย์ บางกรณีเปลี่ยนรูปไปแล้วก็อาจหาค่าลิมิตไม่ได้ และบางกรณีอาจหาลิมิตได้โดยการหาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชันแล้วใช้เกณฑ์การตรวจสอบดังนี้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ดังเช่นตัวอย่างที่ 19 – 21

ตัวอย่างที่ 19 จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2x^2+3}} \right]$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2x^2+3}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2x^2+3})(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3})} \right]$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(x^2+1-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3})}{[3-(2x^2+3)](\sqrt{x^2+1}+1)} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2(\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3})}{-2x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2x^2+3}} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3}}{-2(\sqrt{x^2+1}+1)} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2(0)^2+3}}{-2(\sqrt{(0)^2+1}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{-2(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2x^2+3}} \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(เชื่อมโยงกับเรื่อง ระบบจำนวนจริงและการใช้คู่สังยุค)

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & ; x > 2 \\ 4-2x & ; x < 2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x-2}$ เมื่อ $x > 2$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$

และเนื่องจาก $f(x) = 4-2x$ เมื่อ $x < 2$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4-2x) = (4-2(2)) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

จะได้ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ (เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องระบบจำนวนจริง)

ตัวอย่างที่ 21 จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+|x|}{x}$

วิธีทำ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ต้องพิจารณาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา โดยใช้บทนิยามที่ว่า

$$|x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2\end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+|x|}{x}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+|x|}{x} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องค่าสัมบูรณ์)

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน ทั้ง 3 ทฤษฎี
2. ครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปเนื้อหาลงในแบบสรุปเนื้อหาและทำใบงานที่ 2 เป็นการบ้าน

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 2
2. ใบงานที่ 2
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวีนาเนาประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.

8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เณิมวิสูตรกุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 2 - การทำใบงานที่ 2 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 1 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	- ใบความรู้ที่ 2 - ใบงานที่ 2 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 2 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อ ส่งใบงานตรงเวลาและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน



ใบงานที่ 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ ถ้าลิมิตหาค่าได้

1. $\lim_{x \rightarrow 8} x$	2. $\lim_{x \rightarrow -2} x^5$
3. $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}$	4. $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x+3)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 3x^2 - 2x - 1)$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^7 - 3x^2)$
7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2}$	8. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 2x + 6}$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$	10. $\lim_{x \rightarrow -3} (x+4)^2$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x+3|}{x+3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 2x & ; x > 2 \end{cases}$

จงหา (1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 0 \\ x^2 & ; 0 < x \leq 2 \\ 6-x & ; x > 2 \end{cases}$

จงหา (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots\dots$

แบบสรุปเนื้อหา เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1) ข้อความ "x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย" แทนด้วยสัญลักษณ์

2) ข้อความ "x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา" แทนด้วยสัญลักษณ์

3) ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 4 ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แทนด้วยสัญลักษณ์

.....

4) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต มีดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ $c \in (a,b)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=c$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีความซื่อสัตย์
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ

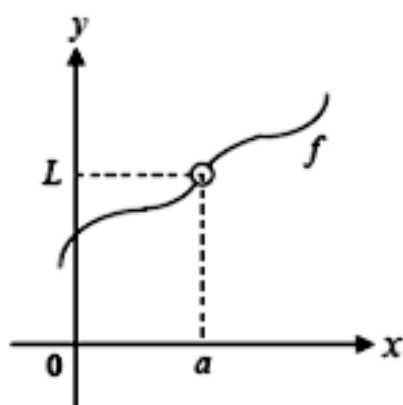
6. มีวิจารณ์ญาณ

สาระการเรียนรู้

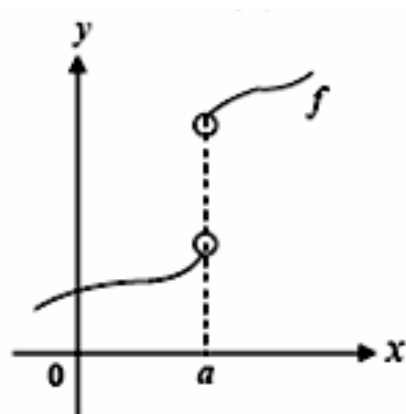
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้ขั้นนำ

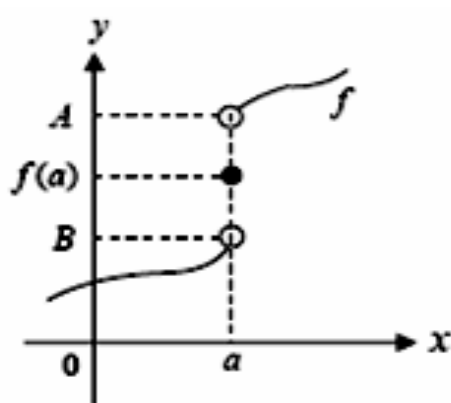
1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการทบทวนความรู้เรื่องลิมิตของฟังก์ชันที่นักเรียนได้เรียนในคาบที่ผ่านมา และให้นักเรียนพิจารณากราฟของฟังก์ชันในรูปต่อไปนี้



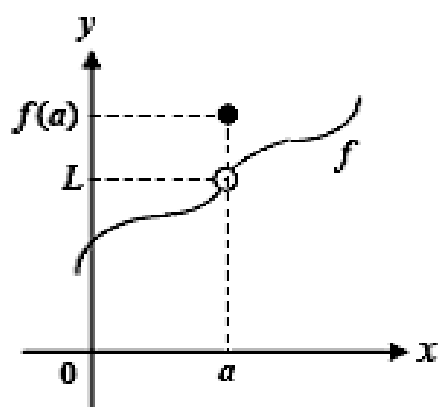
รูปที่ 1



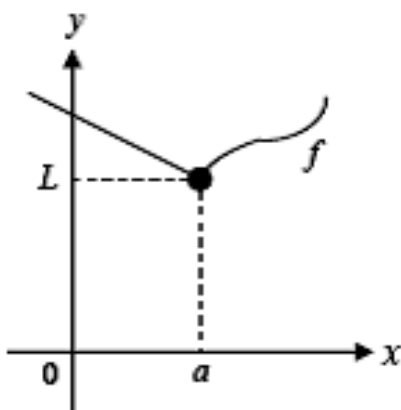
รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4



รูปที่ 5

2. ครูตั้งคำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียน ดังนี้

“จากกราฟทั้ง 5 รูป นักเรียนคิดว่ารูปใดบ้างที่กราฟของฟังก์ชันไม่นิยามที่ $x=a$ และรูปใดบ้างที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูเริ่มต้นด้วยการนำเสนอบทนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งมีความเชื่อมโยงโดยตรงกับเรื่องฟังก์ชันและการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน

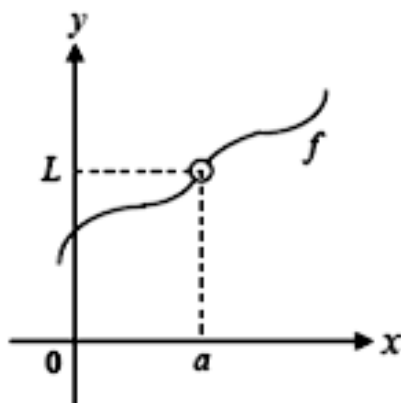
บทนิยาม	ให้ f ที่นิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ $c \in (a,b)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=c$ ก็ต่อเมื่อ
	1. $f(c)$ หาค่าได้
	2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ หาค่าได้
	3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “จากบทนิยาม ถ้าฟังก์ชัน f ขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่งแล้ว ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$ ”

2. จากนั้น ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟในรูปที่ 1-4 อีกครั้งแล้วเปรียบเทียบกับบทนิยาม เพื่อพิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันในรูปใดบ้างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และรูปใดไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง พร้อมทั้งบอกว่าขาด

คุณสมบัติของความต่อเนื่องข้อใด โดยเชื่อมโยงความรู้เรื่องการหาขีดของฟังก์ชันโดยใช้กราฟ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1-4 ต่อไปนี้

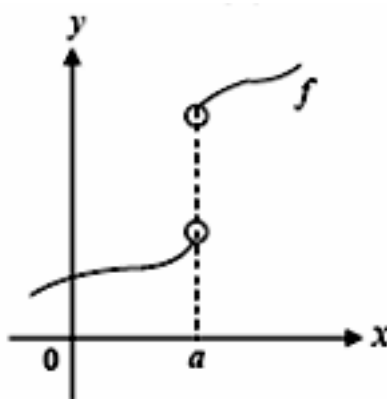
ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่ 1



- พิจารณา
1. $f(a)$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ f ไม่นิยามที่ $x=a$
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

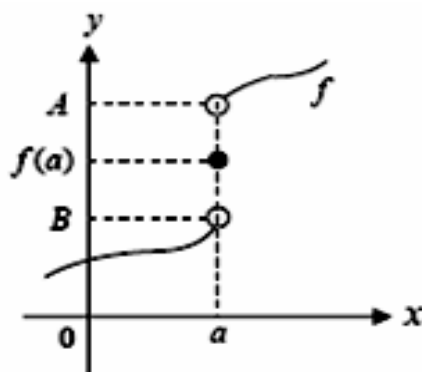
ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่ 2



- พิจารณา
1. $f(a)$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ f ไม่นิยามที่ $x=a$
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เพราะขีดซ้ายไม่เท่ากับขีดขวา
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

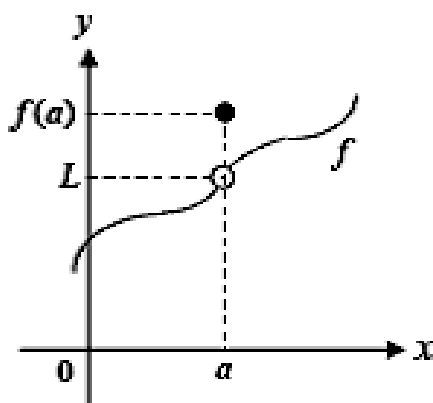
ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

ตัวอย่างที่ 3 จากระดับที่ 3



- พิจารณา
1. $f(a)$ หาค่าได้
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้เพราะลิมิตซ้ายเท่ากับ B ลิมิตขวาเท่ากับ A
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$
- ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

ตัวอย่างที่ 4 จากระดับที่ 4



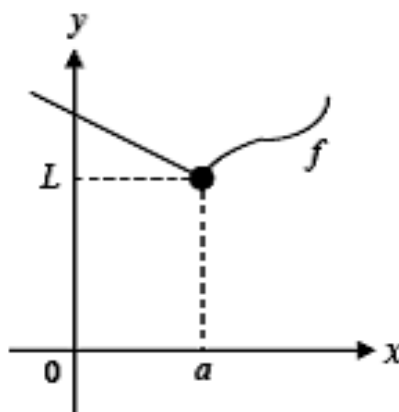
- พิจารณา
1. $f(a)$ หาค่าได้
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

ข้อสังเกต จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันข้างต้นทั้งหมดเป็นกราฟที่ขาดตอนที่ $x=a$ ในลักษณะนี้เราเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

3. จากนั้นครูยกตัวอย่างลักษณะกราฟของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันนั้นมีคุณสมบัติสอดคล้องกับบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 5 จากรูปที่ 5



พิจารณา 1. $f(a) = L$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5 จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ และกราฟของฟังก์ชันไม่ขาดตอนที่ $x = a$

ในลักษณะนี้เราเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

4. ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 6-9 เพิ่มเติม ซึ่งเป็นตัวอย่างที่เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน พหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ โดยนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาค่าขีดจำกัดดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x+6 & ; x \geq 3 \\ x^2 & ; x < 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \begin{cases} x+6 & ; x \geq 3 \\ x^2 & ; x < 3 \end{cases}$

จะได้ $f(3) = 3+6 = 9$

และ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 3^2 = 9$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+6) = 3+6 = 9$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=3$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & ; x \neq 4 \\ 2 & ; x = 4 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=4$ หรือไม่

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสอง ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบเป็น $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

จาก $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & ; x \neq 4 \\ 2 & ; x = 4 \end{cases}$

จะได้ $f(4) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) \\ &= 8 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=4$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & ; x \neq 4 \\ 8 & ; x = 4 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=4$ หรือไม่

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & ; x \neq 4 \\ 8 & ; x = 4 \end{cases}$$

$$\text{จะได้ } f(4) = 8$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 4$

ตัวอย่างที่ 9

$$\text{กำหนดให้ } f(x) = |x + 2|$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -2$ หรือไม่

วิธีทำ

โจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เรื่องค่าสัมบูรณ์ ซึ่งมีนิยามคือ

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$\text{เนื่องจาก } f(x) = |x + 2|$$

$$\text{จากนิยามค่าสัมบูรณ์ จะได้ } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -(x + 2), & x < -2 \end{cases}$$

$$\text{ดังนั้น } f(-2) = (-2) + 2 = 0$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x + 2) = -(-2 + 2) = 0$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = (-2 + 2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

$$\text{จึงได้ว่า } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -2$

5. กรุอธิบายทฤษฎีเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ดังนี้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้วได้ว่า

1. $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ โดยที่ $g \neq 0$

จากที่ทราบมาแล้วว่า ถ้า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ
จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ ดังนั้นจะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ
ฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 จะได้ข้อสรุปเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันตรรกยะดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
ที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $q(a) \neq 0$

6. ครุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3}$
 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3}$
 ให้ $p(x) = x^2 - 4$ และ $q(x) = x^2 - 4x + 3$

เนื่องจาก p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $q(0) = 3 \neq 0$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

7. กรุอธิบายเรื่องความต่อเนื่องบนช่วง ซึ่งเชื่อมโยงกับความรู้เรื่องช่วงของจำนวนจริง โดยกรุทบทวนให้พอสังเขป ดังนี้

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ช่วงเปิด (a, b) : $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$



2. ช่วงปิด $[a, b]$: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$



3. ช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$



4. ช่วงครึ่งเปิด $[a, b)$: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$



ความต่อเนื่องบนช่วง

เราพิจารณาความต่อเนื่องบนช่วงดังนี้

1. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a,b)
2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ
 - 1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a,b) และ
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
3. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ ก็ต่อเมื่อ
 - 1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a,b) และ
 - 2) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
4. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ ก็ต่อเมื่อ
 - 1) f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a,b) และ
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

8. คุรยกตัวอย่างประกอบเรื่องความต่อเนื่องบนช่วง ดังนี้

ตัวอย่างที่ 11 กำหนด $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-2,2]$

วิธีทำ ให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $(-2,2)$

$$\text{จาก } f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$\text{จะได้ } f(c) = \sqrt{4-c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} (4-x^2)} \\ &= \sqrt{(4-c^2)} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-3,3)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2^+} (4-x^2)} = 0 = f(-2)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2^-} (4-x^2)} = 0 = f(2)\end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 2]$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่า k และ m ที่ทำให้ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

$$\text{เมื่อกำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} 2x+k & ; x < 2 \\ 6 & ; x = 2 \\ mx & ; x > 2 \end{cases}$$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ และ $f(2) = 6$ จึงได้ว่า

$$\begin{array}{lll}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) & & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+k) = 6 & \text{และ} & \lim_{x \rightarrow 2^+} mx = 6 \\ 2(2) + k = 6 & & m(2) = 6 \\ k = 2 & & m = 3\end{array}$$

ดังนั้น $k = 2$ และ $m = 3$ ทำให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
2. ครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปเนื้อหาลงในแบบสรุปเนื้อหาและทำใบงานที่ 3 เป็นการบ้าน
3. ครูให้นักเรียนไปทบทวนเรื่องความชันของเส้นตรง ก่อนเรียนเรื่องความชันของเส้นโค้งในคาบต่อไป

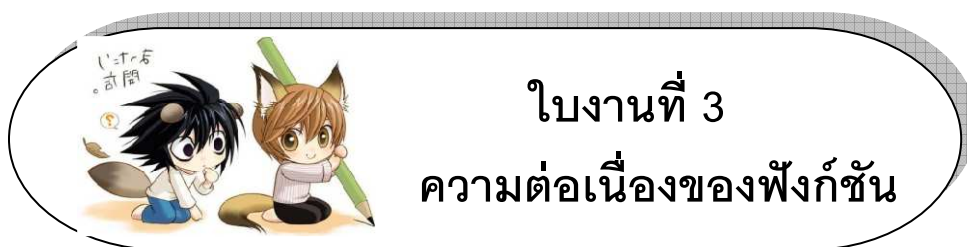
สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 3
2. ใบงานที่ 3
3. แบบสรุปเนื้อหา

4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติมม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 3 - การทำใบงานที่ 3 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 1 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	- ใบความรู้ที่ 3 - ใบงานที่ 3 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 3 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อ ส่งใบงานตรงเวลาและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน



ใบงานที่ 3

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดหรือไม่

1) $f(x) = x + 7$ เมื่อ $x = -7$

.....

.....

.....

.....

.....

2) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ เมื่อ $x = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

3) $f(x) = |x|$ เมื่อ $x = 0$

.....

.....

.....

$$4) \quad f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} \quad \text{в } x=3$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{x}-1} & ; x > \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & ; x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{в } x = \frac{1}{4}$$

3. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-5, 5]$

[illegible]

แบบสรุปเนื้อหา เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

ชื่อ.....
 ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ $x \in \square$ จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ คือ

1.1

1.1

1.1

2. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ จะต้องมีสมบัติ ดังนี้

2.1

2.2

2.3



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่องความชันของเส้นโค้ง

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

เวลา 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง แล้ว เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. หาความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้
2. หาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรรณญาณ

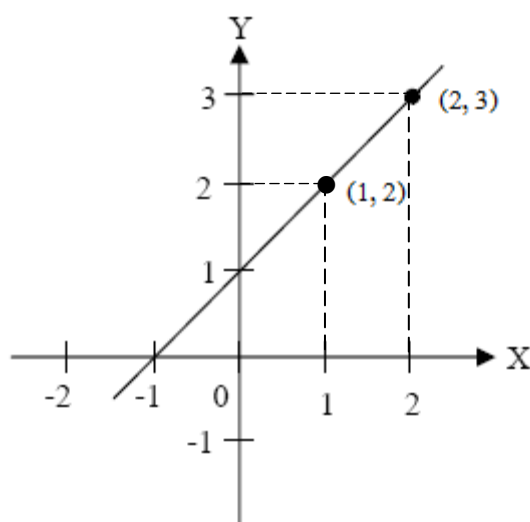
สาระการเรียนรู้

ความชันของเส้นโค้ง

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนเรื่องความชันของเส้นโค้ง โดยการเชื่อมโยงกับเรื่องความชันของเส้นตรงซึ่งนักเรียนเคยศึกษามาแล้วในเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยครูให้นักเรียนทบทวนการหาความชันของเส้นตรง จากการพิจารณารูปต่อไปนี้



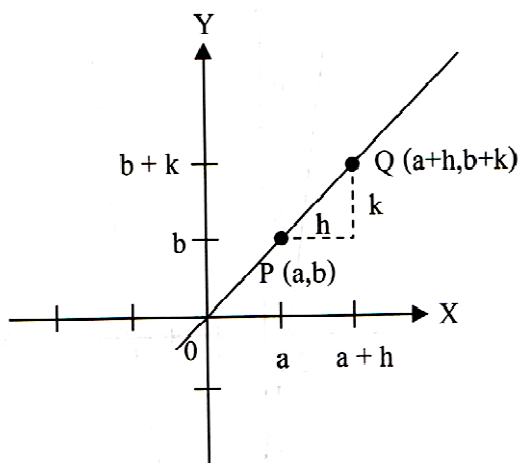
จากรูป นักเรียนควรตอบได้ว่า

$$\text{ความชัน คือ } \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{หรือ } \frac{2-0}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

จะเห็นว่า สำหรับเส้นตรงใด ๆ จะมีความชันเท่ากันตลอดทั้งเส้น ไม่ว่าจะพิจารณาที่จุดใดบนเส้นตรงก็ตาม

2. จากนั้น ครูเสนอแนะผู้เรียนเกี่ยวกับกรณีทั่วไปว่า การหาความชันของเส้นตรงหาได้จากอัตราส่วนของ k และ h ดังรูป



ดังนั้น ความชันของเส้นตรง คือ $\frac{h+k-b}{a+h-a} = \frac{k}{h}$

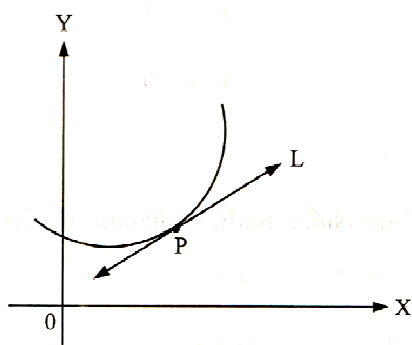
และถ้า m เป็นความชันของเส้นตรงแล้ว สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

3. ครูตั้งคำถามเพื่อเร้าความสนใจของนักเรียน ดังนี้ “สำหรับเส้นโค้งใด ๆ นักเรียนจะหาความชันของเส้นโค้งได้อย่างไร และความชันของเส้นโค้ง ณ จุดที่ต่างกันจะเท่ากันหรือไม่”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูเริ่มต้นด้วยการอธิบายเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ใด ๆ ดังนี้

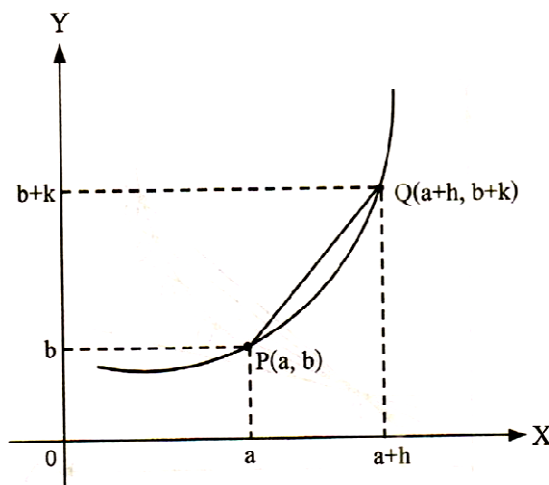
“สำหรับเส้นโค้งใด ๆ เมื่อ P เป็นจุดบนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้ง (tangent line) ที่จุด P จะเป็นเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P ดังรูป



เส้นตรง L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

2. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “ในการหาความชันของเส้นตรง L โดยอาศัยอัตราส่วนของ k และ h นั้นเราต้องทราบจุดบนเส้นตรง L 2 จุด แต่ในที่นี้เราทราบจุดบนเส้นตรง L เพียงจุดเดียว คือจุด P ดังนั้นเราจะอาศัยความรู้เรื่องลิมิต ในการหาความชันของเส้นตรง L ดังนี้

ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง $P(a, b)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง และ $Q(a + h, b + k)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งอีกจุดหนึ่ง โดยที่ $h \neq 0$ ดังรูป



ลากส่วนของเส้นตรง PQ เรียกส่วนของเส้นตรง PQ ว่าเส้นตัดกราฟ

ความชันของส่วนของเส้นตรง PQ เท่ากับ $\frac{(b+k)-b}{(a+h)-a} = \frac{k}{h}$

เนื่องจาก $b+k = f(a+h)$ และ $b = f(a)$

ดังนั้น ความชันของส่วนของเส้นตรง PQ เป็น $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

นั่นคือ $\frac{k}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

เลือกจุด Q_1 บนเส้นโค้งระหว่างจุด P กับจุด Q ลากส่วนของเส้นตรง PQ_1

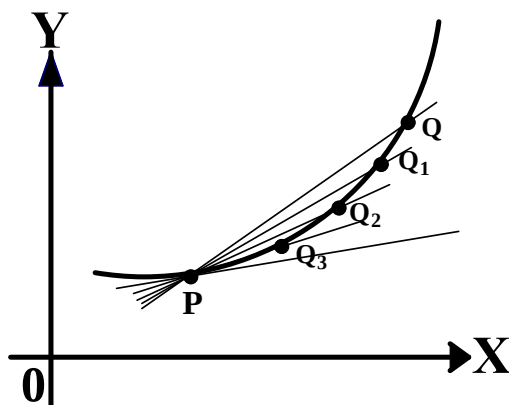
เลือกจุด Q_2 บนเส้นโค้งระหว่างจุด P กับจุด Q_1 ลากส่วนของเส้นตรง PQ_2

เลือกจุด Q_3 บนเส้นโค้งระหว่างจุด P กับจุด Q_2 ลากส่วนของเส้นตรง PQ_3

และต่อ ๆ ไปจนในที่สุดเรามีจุด Q_n ลากส่วนของเส้นตรง PQ_n

จุด Q_n จะอยู่ใกล้จุด P มาก จนถึงได้ว่าจุด Q_n เกือบทับจุด P และตัดเส้นกราฟ PQ_n จะ

เกือบทับกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ดังรูป



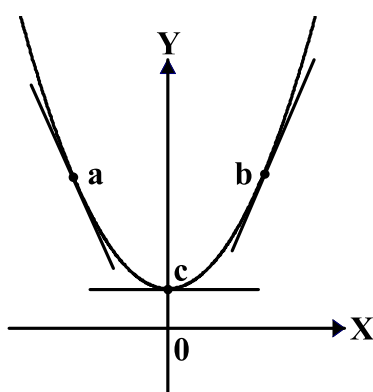
ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P จะมีค่าเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

3. ครูกล่าวว่า “จากการศึกษาข้างต้นนำไปสู่บทนิยามของความชัน ดังนี้”

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

4. จากนั้น ครูให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้เพื่อตอบคำถามที่เกริ่นไว้ในตอนต้นชั่วโมงว่า “ความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งมีค่าเท่ากันหรือไม่”



จากรูป จะเห็นว่าความชันในแต่ละจุดไม่เท่ากัน

นั่นคือ - ความชันที่จุด a เป็นลบ เพราะเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

- ความชันที่จุด b เป็นบวก เพราะเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

- ความชันที่จุด c เป็นศูนย์ เพราะเส้นตรงขนานกับแกน x

5. กรูณาเสนอตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $y = x^2 + 3$ เป็นสมการเส้นโค้งแล้ว จงหา

- 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$
- 2) สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 + 3$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

จาก $f(x) = x^2 + 3$

และ $f(x+h) = (x+h)^2 + 3 = x^2 + 2xh + h^2 + 3$

จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 3) - (x^2 + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ เท่ากับ $2x$

- 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$

แทนค่า $x = -1$ ใน $2x$ จะได้ $2(-1) = -2$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$ คือ -2

- 2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 4)$ และมีความชัน

เท่ากับ -2

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, 4)$ คือ

$$y - 4 = -2(x + 1)$$

$$y - 4 = -2x - 2$$

$$2x + y = 2$$

6. กรูณาเสนอตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $y = x^2 - 3x$ เป็นสมการเส้นโค้งแล้ว จงหา

- 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$
- 2) สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 - 3x$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

จาก $f(x) = x^2 - 3x$

และ $f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h$

จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h) - (x^2 - 3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ เท่ากับ $2x - 3$

- 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$

แทนค่า $x = 3$ ใน $2x - 3$ จะได้ $2(3) - 3 = 3$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ คือ 3

- 2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 0)$ และมีความชันเท่ากับ 3

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$ คือ

$$\begin{aligned} y - 0 &= 3(x - 3) \\ y &= 3x - 9 \end{aligned}$$

7. กรุณาอธิบายเพิ่มเติม “เนื่องจาก $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เป็นความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ ดังนั้น

สำหรับ a ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของ f ความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = a$ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$..

8. จากนั้น กรุณาสอนตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความชันของเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของสมการ $y = \frac{2}{x}$ ที่จุด $(2, 1)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{2}{x}$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 1)$ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

จาก $f(x) = \frac{2}{x}$ จะได้ $f(2) = \frac{2}{2} = 1$ และ $f(2+h) = \frac{2}{2+h}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(2+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 1)$ คือ $-\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $y = x - 2x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง แล้ว จงหา

- 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$
- 2) สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$

วิธีทำ 1) ให้ $f(x) = x - 2x^2$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

จาก $f(x) = x - 2x^2$ จะได้ $f(-1) = (-1) - 2(-1)^2 = -3$

และ $f(-1+h) = (-1+h) - 2(-1+h)^2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h) - 2(-1+h)^2 - (-3)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1+h - 2(1-2h+h^2) + 3}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1+h - 2 + 4h - 2h^2 + 3}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - 2h^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (5 - 2h) \\
&= 5
\end{aligned}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$ เท่ากับ 5

2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, -3)$ และมีความชันเท่ากับ 5

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(-1, -3)$ คือ

$$y + 3 = 5(x + 1)$$

$$y = 5x + 2$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสมการเส้นตรง)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจุดสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - x + 3$ ที่ทำให้เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 0

วิธีทำ เนื่องจากเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - x + 3$ มีความชันเท่ากับ 0 ที่จุด x เมื่อ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$

จาก $f(x) = x^2 - x + 3$

และ $f(x+h) = (x+h)^2 - (x+h) + 3 = x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 3$

จะได้ว่า

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 3) - (x^2 - x + 3)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - h}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ ใน $y = x^2 - x + 3$ จะได้

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4}$$

ดังนั้น จุดสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - x + 3$ ที่ทำให้โค้งมีความชันเท่ากับ 0 คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้าเส้นตรง $y = ax$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2 + 8$ ที่จุด $(1, 11)$
แล้ว จงหาค่าของ a

วิธีทำ เนื่องจากเส้นตรง $y = ax$ มีความชันเท่ากับ a

ถ้าเส้นตรง $y = ax$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2 + 8$

แสดงว่า เส้นตรงกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากัน

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2 + 8$ ที่จุด $(1, 11)$ เท่ากับ a

หาความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ

จาก $f(x) = 3x^2 + 8$

และ $f(x+h) = 3(x+h)^2 + 8 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + 8$

จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 + 8) - (3x^2 + 8)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) \\ &= 6x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด x ใด ๆ เท่ากับ $6x$

แทนค่า $x=1$ ใน $6x = 6(1) = 6$

จะได้ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, 11)$ เท่ากับ 6

ดังนั้น $a = 6$

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปเรื่องความชันของเส้นโค้งดังนี้ “ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนเส้นโค้ง หมายถึง ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)
 2. ครูสรุปเรื่องสมบัติของเส้นตรงเพิ่มเติมเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการทำใบงานที่ 4 ดังนี้
 - 2.1 ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_2
 - ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ว่า $L_1 \parallel L_2$
 - ถ้า $m_1 \cdot m_2 = -1$ จะได้ว่า $L_1 \perp L_2$
 - 2.2 สมการเส้นตรงหาได้จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อ m เป็นความชันของเส้นตรง
- ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นตรง $y = ax$ ที่ขนานกับเส้นตรง $y = 2x + 5$
 เนื่องจากเส้นตรง $y = 2x + 5$ มีความชันเท่ากับ 2
 ดังนั้น เส้นตรง $y = ax$ มีความชันเท่ากับ 2
- ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นตรง $y = ax$ ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = 2x + 5$
 เนื่องจากเส้นตรง $y = 2x + 5$ มีความชันเท่ากับ 2
 ดังนั้น เส้นตรง $y = ax$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$
3. ครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปความรู้ลงในแบบสรุปเนื้อหาและทำใบงานที่ 4 เป็นการบ้าน

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 4
2. ใบงานที่ 4
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวีนา นาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :

เพิ่มทรัพยากรพิมพ์, 2550.

8. ชนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
9. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
10. ศุภกิจ เฉลิมวิศุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และ ทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 4 - การทำใบงานที่ 4 - การทำแบบสรูปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการ ประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 4 - ใบงานที่ 4 - แบบสรูปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 4 ได้ ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่าง น้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปลงได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอัน พึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรูป เนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุก ข้อและเข้าเรียนตลอดคาบ เรียน ผ่าน

2. ถ้า $y = x^2 - 3x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง

จงหา 1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(3, 0)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาจุดสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x - x^2$ ที่ทำให้เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงหาจุดสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่ทำให้เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 2

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. ถ้าเส้นตรง $y = ax$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2 - 5$ ที่จุด $(1, -2)$ จงหา a

[illegible]

แบบสรุปเนื้อหา เรื่องความชันของเส้นโค้ง

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1) ความชันของเส้นตรง หาได้จาก

.....

.....

2) ความชันของเส้นตรงเป็นลบ เมื่อ

ความชันของเส้นตรงเป็นบวก เมื่อ

ความชันของเส้นตรงเป็นศูนย์ เมื่อ

3) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชันเท่ากับ m คือ

.....

4) ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_2 จะได้ว่า

L_1 ขนานกับ L_2 เมื่อ.....

L_1 ตั้งฉาก L_2 เมื่อ.....

5) ความชันของเส้นโค้ง หมายถึง

.....

มีค่าเท่ากับ.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5
เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
 เวลา 4 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

1. ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
 หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของลิมิตที่ได้นี้ว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ”
 เขียนแทนด้วย $f'(x)$
2. ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ a อยู่ในโดเมนของ f แล้ว จะได้ว่า
 - อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
 - อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = a$ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามได้
2. ใช้บทนิยามของอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันในการแก้โจทย์ปัญหาได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ

3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรรย์ญาณ

สาระการเรียนรู้

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการทบทวนเรื่องการหาความชันของเส้นโค้งซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในคาบที่ผ่านมา ดังนี้ “การหาความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x, y)$ เป็นการหาความชันของ $\overline{PQ}$ เมื่อจุด $Q(x+h, y+k)$ เป็นจุดใด ๆ โดยให้ h เข้าใกล้ 0 ซึ่งเป็นการหาอัตราส่วนระหว่าง $f(x+h) - f(x)$ กับ h เมื่อค่า h เข้าใกล้ 0 จึงได้ความชันของเส้นโค้ง คือ $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้ ซึ่งต่อมาเราจะเรียกค่าของลิมิตดังกล่าวนี้ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f** ”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูเริ่มต้นด้วยการนำเสนอบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของลิมิตที่ได้นี้ว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ” เขียนแทนด้วย $f'(x)$

2. ครูอธิบายเพิ่มเติมดังนี้

“จากบทนิยาม จะได้ว่า $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ และ

ถ้า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x

ถ้า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x

นอกจากสัญลักษณ์ $f'(x)$ แล้ว ยังมีสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น $\frac{dy}{dx}$ (ดีวายบายดีเอ็กซ์), y' และ $\frac{d}{dx} f(x)$ เป็นต้น

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ,$$

3. กรุณาย้ำอีกว่า “ $\frac{dy}{dx} \neq \frac{y}{x}$ เพราะว่า $\frac{dy}{dx}$ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ไม่ได้หมายถึง d คูณ y หารด้วย d คูณ x ”

4. จากนั้น กรุณาเสนอตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

จาก $f(x) = \frac{1}{8}x^3$

จะได้ $f(x+h) = \frac{1}{8}(x+h)^3 = \frac{1}{8}(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - \frac{1}{8}x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{8h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{8h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{8}$$

$$= \frac{3x^2}{8}$$

นั่นคือ $f'(x) = \frac{3x^2}{8}$ (เชื่อมโยงกับความรู้อีกเรื่องพหุนามกำลังสามและลิมิตของฟังก์ชัน)

5. ครูอธิบายว่า “จากตัวอย่างที่ 1 เราอาจเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ของอนุพันธ์แบบอื่นได้ กล่าวคือ

$$\text{ถ้า } y = f(x) = 5x^2 + 3x - 1 \text{ แล้ว } \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{8}, y' = \frac{3x^2}{8}, \frac{d}{dx} f(x) = \frac{3x^2}{8}$$

เนื่องจาก $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ ดังนั้น สำหรับ a ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของ f อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=a$ คือ $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$..

6. กรุณาเสนอตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ ดังตัวอย่างที่ 1 จงหา $f'(2)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(2+h)^3 - \frac{1}{8}(2)^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(2^3 + 3(2)^2h + 3(2)h^2 + h^3) - \frac{1}{8}(8)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{8h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{8h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 6h + h^2}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องพหุนามกำลังสามและการหาขีดของฟังก์ชัน โดยอาศัยทฤษฎีบท)

นอกจากนี้ เราอาจหาค่า $f'(a)$ ได้โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ หลังจากนั้น แทน

ค่า x ด้วย a ดังนั้น จากตัวอย่างที่ 1 $f'(x) = \frac{3x^2}{8}$ จะได้ว่า $f'(2) = \frac{3(2)^2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = x^3 - 3x$ จงหา $f'(3)$

วิธีทำ
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

จาก $f(x) = x^3 - 3x$ จะได้ $f(3) = (3)^3 - 3(3) = 27 - 9 = 18$

และ
$$\begin{aligned} f(3+h) &= (3+h)^3 - 3(3+h) \\ &= (3)^3 + 3(3)^2h + 3(3)h^2 + h^3 - 3(3) - 3h \\ &= 27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 9 - 3h \\ &= 18 + 24h + 9h^2 + h^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18 + 24h + 9h^2 + h^3 - 18}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h + 9h^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(24 + 9h + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (24 + 9h + h^2) \\ &= 24 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f'(3) = 24$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องฟังก์ชันและการหาลิมิตโดยอาศัยทฤษฎีบท)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{5x+2}$

- จงหา (1) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x
(2) อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=1$

วิธีทำ (1) จาก $f(x) = \sqrt{5x+2}$
จะได้ $f(x+h) = \sqrt{5(x+h)+2}$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+2} - \sqrt{5x+2}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{5(x+h)+2} - \sqrt{5x+2})(\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2})}{h(\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{5(x+h)+2})^2 - (\sqrt{5x+2})^2}{h(\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)+2 - 5x-2}{h(\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5(x+h)+2} + \sqrt{5x+2}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}
\end{aligned}$$

นั่นคือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x คือ $\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$

$$(2) \quad \text{อนุพันธ์ของฟังก์ชัน } f \text{ ที่ } x=1 \text{ คือ } \frac{5}{2\sqrt{5x+2}} = \frac{5}{2\sqrt{5(1)+2}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องฟังก์ชัน คู่สังยุค สมบัติของจำนวนจริงและการหาขีดจำกัดโดยอาศัยทฤษฎีบท)

ครูกล่าวว่า “จากบทนิยามของอนุพันธ์ และสำหรับ a ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของ f จะได้ว่า $f'(a)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$ ดังนั้น จากตัวอย่างที่ 4 ความชันของเส้นโค้ง $f(x) = \sqrt{5x+2}$ ที่จุด $(1, \sqrt{7})$ เท่ากับ $f'(1) = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ”

7. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า

“ ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่มีจุด $P(a, b)$ และ $Q(a+h, b+k)$ อยู่บนกราฟของฟังก์ชัน

จะได้ว่า ความชันของส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด Q มีค่าเท่ากับ $\frac{(b+k)-b}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

อัตราส่วนนี้เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$

และถ้าเลื่อนจุด Q ตามแนวเส้นกราฟเข้าหาจุด P นั่นคือ h เข้าใกล้ศูนย์ และถ้า

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของลิมิตนี้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x=a$ ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

บทนิยาม กำหนด $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ a อยู่ในโดเมนของ f แล้ว
 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$
 คือ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก $x=1$ เป็น $x=3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2$
 จะได้ $f(1) = (1)^2 = 1$ และ $f(3) = (3)^2 = 9$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก $x=1$ ไปเป็น

$$x=3 \text{ คือ } \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ

บทนิยาม กำหนด $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ a อยู่ในโดเมนของ f แล้ว
 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ข้อสังเกต อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ ก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=a$ นั่นเอง

8. จากนั้น ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (A) มีความยาวด้าน x เมตร จงคำนวณหา

- 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 5 เมตร เป็น 8 เมตร
- 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน ขณะที่ความยาวด้านเป็น x เมตร และขณะที่ความยาวด้านเป็น 12 เมตร

วิธีทำ เนื่องจาก พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ (ด้าน)²

$$\text{จะได้ว่า } A = f(x) = x^2$$

- 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 5 เมตร เป็น 8 เมตร คือ

$$\frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{64 - 25}{3} = 13 \quad \text{ตารางเมตรต่อเมตร}$$

- 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน ขณะที่ความยาวด้านเป็น x เมตร คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$\text{จาก } f(x) = x^2$$

$$\text{จะได้ } f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x \quad \text{ตารางเมตรต่อเมตร} \end{aligned}$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน ขณะที่ความยาวด้านเป็น x เมตร คือ $2x$ ตารางเมตรต่อเมตร

เพราะฉะนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน ขณะที่ความยาวด้านเป็น 12 เมตร คือ $2x = 2(12) = 24$ ตารางเมตรต่อเมตร

9. กรุณาให้ข้อสังเกตจากตัวอย่างที่ 6 ดังนี้ “ในตัวอย่างที่ 6 นี้ อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนบวก แสดงว่าพื้นที่เพิ่มขึ้น เมื่อความยาวด้านเพิ่มขึ้น”

10. กรุณาเสนอตัวอย่างที่ 7 ซึ่งเป็นโจทย์ที่เชื่อมโยงกับปัญหาเชิงวิทยาศาสตร์

ตัวอย่าง 7 ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยาเปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{8}{t+1}$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 5$ นาที

วิธีทำ ให้ $N = f(t) = \frac{8}{t+1}$ จะได้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N ในขณะเวลา t ใดๆ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{8}{t+h+1} - \frac{8}{t+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{8t+8-8t-8h-8}{(t+h+1)(t+1)} \right) \\ &= \frac{-8}{(t+1)^2} \quad \text{กรัมต่อนาที}\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 5$ นาที คือ

$$\frac{-8}{(5+1)^2} = \frac{-8}{36} = \frac{-2}{9} \quad \text{กรัมต่อนาที}$$

11. กรุณาให้ข้อสังเกตจากตัวอย่างที่ 7 ดังนี้ “ในตัวอย่างที่ 7 นี้ อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนลบ แสดงว่าเมื่อเวลา t เพิ่มขึ้น ปริมาณสารในน้ำยาจะลดลง”

12. กรุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 8 รถขุดดินคันหนึ่ง ขุดดินได้ V ลูกบาศก์เมตร เมื่อเวลาผ่านไป t นาที ถ้าวัดขุดดินคันนี้ ขุดดินเป็นไปตามกฎ $V = 10t - \frac{t^2}{5}$ จงหา

- 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรดินที่ขุดได้เทียบกับเวลาในช่วงเวลานาทีที่ 5 ถึง นาทีที่ 10
- 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรดินที่ขุดได้เทียบกับเวลาในขณะนาทีที่ 10

วิธีทำ ให้ $V = f(t) = 10t - \frac{t^2}{5}$

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรดินที่ขุดได้เมื่อเทียบกับเวลาในช่วงเวลา t นาทีถึงเวลา $t+h$ นาที คือ

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{\left[10(t+h) - \frac{(t+h)^2}{5}\right] - \left[10(t) - \frac{(t)^2}{5}\right]}{h} \\
&= \frac{10t + 10h - \frac{t^2}{5} - \frac{2th}{5} - \frac{h^2}{5} - 10t + \frac{t^2}{5}}{h} \\
&= \frac{10h - \frac{2th}{5} - \frac{h^2}{5}}{h} \\
&= 10 - \frac{2t}{5} - \frac{h}{5}
\end{aligned}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเมื่อเทียบกับเวลาในช่วง $t=5$ ถึง $t=10$ ได้จากการแทนค่า t ด้วย 5 และแทนค่า h ด้วย $10-5=5$

$$\text{จะได้ } \frac{f(10) - f(5)}{h} = 10 - \frac{2(5)}{5} - \frac{5}{5} = 7 \text{ ลูกบาศก์เมตร / นาที}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรคินที่จุดใดเทียบกับเวลาในขณะเวลา t ใดๆ หาได้จาก

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(10 - \frac{2t}{5} - \frac{h}{5}\right) \\
&= 10 - \frac{2t}{5} \quad \text{ลูกบาศก์เมตร / นาที}
\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรคินที่จุดใดเทียบกับเวลาในขณะนาทีที่ 10

$$\text{คือ } 10 - \frac{2(10)}{5} = 10 - 4 = 6 \quad \text{ลูกบาศก์เมตร / นาที}$$

ข้อสังเกต ในตัวอย่างที่ 8 อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนบวก แสดงว่าปริมาตรเพิ่มขึ้น เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

13. ครุณาเสนอความเร็วและความเร่งของวัตถุขณะเวลา t ใดๆ

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

กำหนด $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อ s แทนระยะทาง และ t แทนเวลา ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ขณะ t ใดๆ เขียนแทนความเร็วขณะเวลา t ใดๆ ด้วย $v(t)$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{ds}{dt}$$

ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ

กำหนด $v = f(t)$ เป็นสมการความเร็วของวัตถุ เมื่อ v แทนความเร็ว และ t แทนเวลา ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ v เทียบกับ t ขณะ t ใด ๆ เขียนแทนความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ ด้วย $a(t)$

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dv}{dt}$$

14. จากนั้น กรุณาสอนตัวอย่างที่ 9-10 ซึ่งเป็นปัญหาที่ศึกษากันมากในวิชาฟิสิกส์

ตัวอย่างที่ 9 การโยนลูกบอลขึ้นในอากาศในแนวดิ่งมีสมการการเคลื่อนที่เป็น $S = 80t - 16t^2$ เมื่อ S เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของลูกบอลขณะลูกบอลอยู่สูงจากพื้นดิน 64 เมตร

วิธีทำ จากสมการการเคลื่อนที่ $S = 80t - 16t^2$

เมื่อลูกบอลอยู่สูงจากพื้นดิน 64 เมตร

$$\text{จะได้} \quad 64 = 80t - 16t^2$$

$$16t^2 - 80t + 64 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$t = 1, 4$$

ดังนั้นลูกบอลอยู่สูงจากพื้นดิน 64 เมตร ขณะเวลานาทีที่ 1 และนาทีที่ 4

ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของลูกบอลขณะเวลา t ใด ๆ

คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[80(t+h) - 16(t+h)^2] - [80(t) - 16(t)^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{80t + 80h - 16t^2 - 32th - 16h^2 - 80t + 16t^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 80 - 32t - 16h \\ &= 80 - 32t \quad \text{เมตรต่อวินาที} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา $t=1$ เป็น $80 - 32(1) = 48$ เมตรต่อวินาที

ความเร็วขณะเวลา $t=4$ เป็น $80 - 32(4) = -48$ เมตรต่อวินาที

ข้อสังเกต ในตัวอย่างที่ 9 อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนลบ แสดงว่าความสูงจะลดลง เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 10 อนุภาคชิ้นหนึ่งมีความเร็ว $v = 2t^2 + 5t - 2$ จงหาความเร่งของอนุภาคนี้อยู่ เมื่อเวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ จากสมการความเร็ว $v = f(t) = 2t^2 + 5t - 2$
จะได้ว่า ความเร่งของอนุภาคขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว

เทียบกับ t ขณะ t ใด ๆ มีค่าเท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

$$\text{จาก } f(t) = 2t^2 + 5t - 2$$

$$\text{จะได้ } f(t+h) = 2(t+h)^2 + 5(t+h) - 2 = 2t^2 + 4th + 2h^2 + 5t + 5h - 2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2t^2 + 4th + 2h^2 + 5t + 5h - 2) - (2t^2 + 5t - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4t + 2h + 5 \\ &= 4t + 5 \quad \text{หน่วยต่อวินาที} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ความเร่งขณะเวลา $t = 2$ วินาที คือ $4(2) + 5 = 13$ หน่วยต่อวินาที

ข้อสังเกต ในตัวอย่างที่ 10 อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนบวก แสดงว่าความเร็วเพิ่มขึ้น เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

ขั้นสรุป

1. กระบวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แทนค่า x ด้วย $x+h$ ใน $f(x)$

ขั้นที่ 2 หา $f(x+h) - f(x)$

ขั้นที่ 3 หาค่า $f(x+h) - f(x)$ ด้วย h

ขั้นที่ 4 หา $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2. จากนั้น ครูสรุปเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

“สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$

- เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนบวก แสดงว่าเมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะเพิ่มขึ้น
- เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนลบ แสดงว่าเมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะลดลง”

3. ครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปความรู้ลงในแบบสรุปเนื้อหา และให้นักเรียนทำใบงานที่ 5 เป็นการบ้าน

สื่อ / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 5
2. ใบงานที่ 5
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
5. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2548.
6. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : พิมพ์การพิมพ์, 2550.
7. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธีรับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เถลิณวิสุตมกุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 5 - การทำใบงานที่ 5 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 5 - ใบงานที่ 5 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 5 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน

ใบงานที่ 5

อนุพันธ์ของฟังก์ชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ नियम

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$

3. $f(x) = 2x^3 + 1$

4. $f(x) = 5 - 3x + x^2$

5. $f(x) = \sqrt{1 - 3x^2}$

2. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x - 1$ จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่า x เปลี่ยนแปลงจาก 0 ไปเป็น 3

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อค่าขณะ x มีค่าใด ๆ

3. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อค่าขณะ x มีค่า 3

3. ทรงกระบอกจุ 400 ลูกบาศก์เซนติเมตร อากาศภายในมีความดัน 15 กรัม ต่อหนึ่งตารางเซนติเมตร ขณะที่กดลูกสูบลงอุณหภูมิมีค่าคงตัว ความดันจะเพิ่มขึ้น และปริมาตรจะลดลงตามสมการ $PV = 6000$ (P เป็นความดันและ V เป็นปริมาตร) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P เทียบกับ V ในขณะที่ $V = 100$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

แบบสรุปเนื้อหา

เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ได้แก่

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เรียกว่า

3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอน ดังนี้

4. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

5. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x=a$ คือ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

เวลา 4 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกวิธีหนึ่งนอกจากการใช้บทนิยาม นั่นคือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งทำให้สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $f'(x) = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x) = c f'(x)$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร เมื่อกำหนดฟังก์ชันพีชคณิตให้ได้
2. นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจารณญาณ

สาระการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยามของการหาอนุพันธ์ ดังนี้ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ คือ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ และสามารถเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ได้หลายรูปแบบ เช่น $\frac{dy}{dx}$, y' และ $\frac{d}{dx} f(x)$ เป็นต้น
2. ครูเสนอแนะนักเรียนว่า การหาอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันบางฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามนั้นค่อนข้างยุ่งยากและใช้เวลานาน ดังนั้นเพื่อให้การหาอนุพันธ์สามารถทำได้สะดวกและรวดเร็ว จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับหาอนุพันธ์ขึ้นมา ซึ่งสามารถพิสูจน์สูตรเหล่านี้ได้โดยใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูนำเสนอสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต พร้อมการพิสูจน์และตัวอย่างประกอบดังนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $f'(x) = 0$

พิสูจน์
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} & (\because f(x)=c, f(x+h)=c) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = -19$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-19) = 0$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 8$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 8$ จะได้ $f'(x) = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$

พิสูจน์
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} & (\because f(x) = x, f(x+h) = x+h) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

ครูอธิบายเรื่องทฤษฎีบททวินามเพื่อใช้ในการพิสูจน์สูตรที่ 3 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (x+y)^n &= \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} x^{n-n} y^n \\
 &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^n
 \end{aligned}$$

และ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (\because f(x) = x^n, f(x+h) = (x+h)^n) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x^4$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = x^4$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $y = \frac{1}{x^5}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{-5}) \\ &= -5x^{-5-1} \\ &= -5x^{-6} \\ &= \frac{-5}{x^6} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $y = \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

สูตรที่ 4 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $y = x^3 + x^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^3 + x^5$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 + x^5) \\
 &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^5) \\
 &= 3x^2 + 5x^4
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 5 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับการพิสูจน์สูตรที่ 4 โดยครูให้นักเรียนพิสูจน์ลงในแบบสรุปเนื้อหาเป็นการบ้าน

ข้อสังเกต จากสูตรที่ 4 และสูตรที่ 5 จะได้ว่า อนุพันธ์ของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันเท่ากับผลบวกหรือผลต่างของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และถ้า $y = f(x) + g(x) - h(x)$ เมื่อ $f'(x)$, $g'(x)$ และ $h'(x)$ หาค่าได้แล้ว $\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x) - h'(x)$ ซึ่งเราสามารถขยายจำนวนฟังก์ชันที่บวกลบกันเป็นกี่ฟังก์ชันก็ได้

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $y = x^7 + x^5 - x^3 - 2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^7 + x^5 - x^3 - 2$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^7 + x^5 - x^3 - 2) \\
 &= \frac{d}{dx}(x^7) + \frac{d}{dx}(x^5) - \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(2) \\
 &= 7x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 0 \\
 &= 7x^6 + 5x^4 - 3x^2
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x) = c f'(x)$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = cf(x)$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= c \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= c(f'(x))
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $y = 7x^3 - 4x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จาก $y = 7x^3 - 4x$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(7x^3 - 4x) \\
&= \frac{d}{dx}(7x^3) - \frac{d}{dx}(4x) \\
&= 7 \frac{d}{dx}(x^3) - 4 \frac{dx}{dx} \\
&= 7(3x^2) - 4 \\
&= 21x^2 - 4
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $f(x) = 5x^4 - 6x^2 - 2x + 3$ จงหา $f'(-1)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = 5x^4 - 6x^2 - 2x + 3$

จะได้

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^4 - 6x^2 - 2x + 3) \\
&= \frac{d}{dx}(5x^4) - \frac{d}{dx}(6x^2) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3) \\
&= 5 \frac{d}{dx}(x^4) - 6 \frac{d}{dx}(x^2) - 2 \frac{dx}{dx} + 0 \\
&= 5(4x^3) - 6(2x) - 2 \\
&= 20x^3 - 12x - 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(-1) = 20(-1)^3 - 12(-1) - 2 = -20 + 12 - 2 = -10$

สูตรที่ 7 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

พิสูจน์

ให้ $F(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $y = (x^2 - x + 1)(x + 3)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1

จาก $y = (x^2 - x + 1)(x + 3)$

$$\begin{aligned} &= x^3 - x^2 + x + 3x^2 - 3x + 3 \\ &= x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 2x + 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3) \\ &= 3x^2 + 2 \frac{d}{dx}(x^2) - 2 \frac{dx}{dx} + 0 \\ &= 3x^2 + 2(2x) - 2 \\ &= 3x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

จาก $y = (x^2 - x + 1)(x + 3)$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(x^2 - x + 1)(x + 3)]$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - x + 1) \frac{d}{dx}(x+3) + (x+3) \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 - x + 1)(1) + (x+3)(2x-1) \\
&= x^2 - x + 1 + 2x^2 - x + 6x - 3 \\
&= 3x^2 + 4x - 2
\end{aligned}$$

ครูให้ข้อสังเกตว่า การหาอนุพันธ์ของผลคูณนั้น นักเรียนสามารถหาผลคูณของฟังก์ชันก่อนแล้วหาอนุพันธ์ของผลคูณนั้น หรืออาจหาโดยใช้สูตรที่ 8 ก็จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน

สูตรที่ 8 ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

พิสูจน์ ให้ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x) \cdot g(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\left[g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x) \cdot g(x+h)} \right) \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)}
\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(3x-2) - (3x-2)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1)(3) - (3x-2)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x+3-3x+2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{5}{(x+1)^2}$$

2. กรุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $f(x) = (2x^7 - x^2)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (2x^7 - x^2)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$= \frac{2x^8 - 2x^7 - x^3 + x^2}{x+1}$$

จะได้

$$f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x^8 - 2x^7 - x^3 + x^2) - (2x^8 - 2x^7 - x^3 + x^2)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(16x^7 - 14x^6 - 3x^2 + 2x) - (2x^8 - 2x^7 - x^3 + x^2)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{16x^8 - 14x^7 - 3x^3 + 2x^2 + 16x^7 - 14x^6 - 3x^2 + 2x - 2x^8 + 2x^7 + x^3 - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{14x^8 + 4x^7 - 14x^6 - 2x^3 - 2x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3 - 5x^2$
 จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2) = 6x^2 - 10x$
 ให้ $f'(x) = 0$
 จะได้ว่า $6x^2 - 10x = 0$
 หรือ $2x(3x - 5) = 0$
 นั่นคือ $x = 0$ หรือ $x = \frac{5}{3}$
 ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $x = \frac{5}{3}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = -4x + 2x^2 - 3x^4$ ที่จุด $(1, -5)$

วิธีทำ จาก $y = -4x + 2x^2 - 3x^4$
 เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใด ๆ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = -4 + 4x - 12x^3$$

$$\text{และที่ } x=1 \text{ จะได้ } \frac{dy}{dx} = -4 + 4(1) - 12(1)^3 = -12$$

นั่นคือ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -5)$ มีความชันเป็น -12

เนื่องจากสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x_1, y_1) ใด ๆ และมีความชันเท่ากับ

$$m \text{ คือ } y - y_1 = m(x - x_1)$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, -5)$ มีความชันเป็น -12 คือ

$$y + 5 = -12(x - 1)$$

$$\text{หรือ } 12x + y - 7 = 0$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ต้องการคือ $12x + y - 7 = 0$

3. ครุณาเสนอตัวอย่างเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 15 วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $s = t^3 - 2t + 5$ เมื่อ s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุนี้ในขณะ $t = 10$ วินาที

วิธีทำ จาก $s = t^3 - 2t + 5$

เนื่องจากความเร็วของวัตถุในขณะเวลา t ใด ๆ คืออนุพันธ์ของ s เทียบกับ t

$$\text{จะได้ } \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$$

นั่นคือ ความเร็วของวัตถุในขณะเวลา t ใด ๆ คือ $3t^2 - 2$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุนี้ในขณะเวลา $t = 10$ วินาที เท่ากับ $3(10)^2 - 2 = 298$ เมตร / วินาที

ขั้นสรุป

ครูสรุปสูตรทั้ง 8 สูตรอีกครั้งหนึ่ง จากนั้นครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปความรู้ลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 6 เป็นการบ้าน

สื่อ / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 6
2. ใบงานที่ 6
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
5. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
6. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
7. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 6 - การทำใบงานที่ 6 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 6 - ใบงานที่ 6 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 6 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน

ใบงานที่ 6

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = -3$

2. $y = x^3 + \frac{x}{3}$

3. $y = x^3 - 3x + 7$

4. $y = -5x^2 + x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

5. $s = 4t^5 - 3t^2 + t - 8$

6. $s = (4t^2 + t - 1)(t + 2)$

7. $y = x(x+1)(x+2)$

8. $y = (4x - x^2)(x^2 + 3)$

9. $y = x(x^2 + 1)$

10. $y = \frac{x^3 + 2}{x}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนดให้

1. $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่ $x = 1$

2. $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x - x^2)$ ที่ $x = -1$

3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ที่ $x = 2$

3. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 5x + 2$ ที่จุด $(2,0)$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,3)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด $(1,1)$

5. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^4$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

- กฎลูกโซ่ : ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- อนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ เช่น อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x)$ เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3
- อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เทียบกับ x ใดๆ ก็คือ การหาอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งสามารถนำมาใช้ในเรื่องการเคลื่อนที่และในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัส ขณะที่ x มีค่าใดๆ ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบโดยใช้กฎลูกโซ่ได้
- หาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันได้
- นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถในการ

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
- การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

- ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
- ทำงานอย่างเป็นระบบ
- มีระเบียบวินัย

4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรรย์ญาณ

สาระการเรียนรู้

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f(x) = (x^7 - 2x^{-7})^{12}$ และชี้ให้นักเรียนเห็นว่าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีดีกรีสูง ๆ โดยใช้บทนิยาม $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วนั้นค่อนข้างลำบาก ดังนั้น จึงมีการสร้างสูตรที่เรียกว่า กฎลูกโซ่ ซึ่งกฎนี้จะใช้กับฟังก์ชันที่เรียกว่า ฟังก์ชันประกอบ โดยครูทบทวนความรู้เรื่องฟังก์ชันประกอบ ดังนี้

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x จะได้ว่า ฟังก์ชันประกอบ (composite function) เขียนแทนด้วย $f \circ g$ กำหนดโดย $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x - 2$

$$\text{จะได้ว่า } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$$

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูนำเสนอสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งเรียกว่า กฎลูกโซ่ (chain rule) พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

สูตร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

จากสูตร ถ้าให้ $u = f(x)$ และให้ $y = (g \circ f)(x)$

$$\text{จะได้ว่า } y = g(f(x)) = g(u)$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \frac{d}{du} g(u) \cdot \frac{d}{dx} (u)\end{aligned}$$

ฉะนั้น สูตรข้างต้นสามารถเขียนในอีกรูปแบบได้ดังนี้

ถ้า $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$ และ $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ หาค่าได้

แล้ว

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = (3x-1)^4$ หา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-1$

$$\text{ดังนั้น } y = f(x) = (3x-1)^4 = u^4$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{du}{dx} = 3 \text{ และ } \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^4) = 4u^3$$

$$\text{โดยกฎลูกโซ่ จะได้ } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3(3)$$

$$= 12u^3$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 12(3x-1)^3$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = \sqrt{x+1}$ หา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = x+1$

$$\text{ดังนั้น } y = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\text{และ } \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยกฎลูกโซ่ จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(1) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2+1}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = 2x^2 + 1$

$$\text{ดังนั้น } y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{(u)^{\frac{1}{3}}} = u^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2+1) = 4x$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } \frac{dy}{du} &= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{3}}\right) \\
 &= -\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3u^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{u^4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยกฎลูกโซ่ จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= -\frac{1}{3\sqrt[3]{u^4}}(4x) \\
 &= -\frac{4x}{3\sqrt[3]{u^4}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น แทนค่า } u = 2x^2 + 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^4}}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $y = \left[\frac{2x+3}{1-2x} \right]^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = \frac{2x+3}{1-2x}$

$$\text{ดังนั้น } y = \left[\frac{2x+3}{1-2x} \right]^3 = u^3$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2x+3}{1-2x} \right) \\ &= \frac{(1-2x) \frac{d}{dx}(2x+3) - (2x+3) \frac{d}{dx}(1-2x)}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{(1-2x)(2) - (2x+3)(-2)}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{2-4x+4x+6}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{8}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{และ } \frac{dy}{du} = \frac{d}{du} u^3 = 3u^2$$

$$\begin{aligned} \text{โดยกฎลูกโซ่ จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \left(\frac{8}{(1-2x)^2} \right) \\ &= \frac{24u^2}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น แทนค่า } u = \frac{2x+3}{1-2x}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{24 \left(\frac{2x+3}{1-2x} \right)^2}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{24(2x+3)^2}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{24(2x+3)^2}{(1-2x)^4} \end{aligned}$$

2. จากนั้น ครุณาเสนอเนื้อหาเรื่อง “อนุพันธ์อันดับสูง” โดยการยกตัวอย่างฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสามารถหาอนุพันธ์ได้อีก

$$\begin{aligned}\text{เช่น } f(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x - 5 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 4x + 6 \\ \frac{d}{dx} f'(x) &= 24x^2 - 18x + 4\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f'(x)$ คือ $24x^2 - 18x + 4$

3. ครูกล่าวว่า “จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ข้างต้น จะพบว่า เมื่อเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ ได้เป็น $f'(x)$ ซึ่ง f' เป็นฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง เราอาจพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ได้อีก ดังตัวอย่างต่อไปนี้”

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

ก. จงหาอนุพันธ์ของ f

ข. จงหาอนุพันธ์ของ f'

วิธีทำ ก. จงหาอนุพันธ์ของ f

$$\text{จาก } f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^3 + 2x^2 + 3x - 5) = 3x^2 + 4x + 3$$

$$\text{หรือ } f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ คือ $3x^2 + 4x + 3$

ข. จงหาอนุพันธ์ของ f'

$$\text{จาก } f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} (3x^2 + 4x + 3)$$

$$= 6x + 4$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ใด ๆ คือ $6x + 4$

4. ครูกล่าวว่า “จากตัวอย่างที่ 5 จะเห็นว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ยังสามารถนำไปหาอนุพันธ์ต่อไปได้อีก และสามารถให้นิยามอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้”

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x และเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ด้วย $f''(x)$

5. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “ยังมีสัญลักษณ์อื่นที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x เช่น

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} f(x) \text{ และ } y'' \text{ เป็นต้น}$$

และในทำนองเดียวกันเราสามารถกล่าวถึง

อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f ที่ x ได้ว่า เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วย $f'''(x)$ หรือ $\frac{d^3 y}{dx^3}$ และ

อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f ที่ x เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$ หรือ $\frac{d^4 y}{dx^4}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ x เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ ของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^n y}{dx^n}$

6. ครูให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมดังนี้ “อนุพันธ์อันดับที่ 4 เป็นต้นไป จะใช้ตัวเลขกำกับ เช่น

$$f^{(4)}(x), f^{(10)}(x), \frac{d^5 y}{dx^5}, \frac{d^9 y}{dx^9} \text{ „}$$

7. ครูนำเสนอตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x - 7$ จงหา $f^{(5)}(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x - 7$

จะได้ $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 10x + 6$

$$f''(x) = 12x^2 + 24x + 10$$

$$f'''(x) = 24x + 24$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

ดังนั้น $f^{(5)}(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด $f(x) = x + \frac{1}{x}$ จงหา $f'''(1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$

จะได้ $f'(x) = 1 - x^{-2}$

$$f''(x) = 2x^{-3}$$

และ $f'''(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

ดังนั้น $f'''(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$

ตัวอย่างที่ 8 $f(x) = \frac{3x-2}{5x}$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{3x-2}{5x}$

จะได้ $f'(x) = \frac{(5x)\frac{d}{dx}(3x-2) - (3x-2)\frac{d}{dx}(5x)}{(5x)^2}$

$$= \frac{(5x)(3) - (3x-2)(5)}{25x^2}$$

$$= \frac{15x - 15x + 10}{25x^2}$$

$$= \frac{2}{5x^2}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{5x^2 \frac{d}{dx}(2) - 2 \frac{d}{dx}(5x^2)}{(5x^2)^2} \\
 &= \frac{5x^2(0) - 2(10x)}{25x^4} \\
 &= -\frac{4}{5x^3}
 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 8 นักเรียนอาจหา $f'(x)$ และ $f''(x)$ ได้อีกวิธีหนึ่ง ดังนี้

$$\text{จาก } f(x) = \frac{3x-2}{5x} = \frac{3x}{5x} - \frac{2}{5x} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}x^{-1}$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}x^{-1}\right) = 0 - \left(-\frac{2}{5}x^{-2}\right) = \frac{2}{5x^2}$$

$$\text{และ } f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}x^{-2}\right) = -\frac{4}{5}x^{-3} = -\frac{4}{5x^3}$$

8. ครูแนะนำนักเรียนเกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับสูงไปใช้ประโยชน์ในเรื่องของการเคลื่อนที่ ดังนี้

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ใด ๆ นั่นเอง สำหรับตัวอย่างของการนำอนุพันธ์อันดับที่ 2 ไปใช้ในทางกายภาพได้แก่ ความเร่ง (acceleration)

เนื่องจากความเร่ง (a) ของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (v) เทียบกับเวลา t ใด ๆ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ เมื่อ s คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t

$$\text{จะได้ } a = \frac{dv}{dt} \quad \text{และ} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{ดังนั้น } a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

นั่นคือ ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ ก็คืออนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $s = f(t)$

9. จากนั้น ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 9

ตัวอย่างที่ 9 เมื่อเวลา t วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 5t^3 - 3t^2 + 4t$ เมตร

- จงหา 1) ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ
 2) ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ
 3) ความเร่งขณะเวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ

- 1) ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ

$$\text{จาก } s = 5t^3 - 3t^2 + 4t$$

$$\text{จะได้ } v = \frac{ds}{dt} = 15t^2 - 6t + 4 \text{ เมตร/วินาที}$$

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ $15t^2 - 6t + 4$ เมตร/วินาที

- 2) ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ

$$\text{จาก } v = 15t^2 - 6t + 4$$

$$\text{จะได้ } a = \frac{dv}{dt} = 30t - 6$$

ดังนั้น ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เท่ากับ $30t - 6$ เมตร/(วินาที)²

- 3) ความเร่งขณะเวลา $t = 2$ วินาที

จากข้อ (2) จะได้ความเร่งขณะเวลา $t = 2$ วินาที เท่ากับ $30(2) - 6 = 54$ เมตร/(วินาที)²

10. ครูอธิบายเพิ่มเติมอีกว่า “ถ้าความเร่งเป็นจำนวนบวก แสดงว่า เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ความเร็วจะเพิ่มขึ้นและถ้าความเร่งเป็นจำนวนลบแสดงว่า เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ความเร็วจะลดลง”

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบโดยอาศัยกฎลูกโซ่ และสรุปบทนิยามของอนุพันธ์อันดับสูงอีกครั้งหนึ่ง
2. ครูมอบหมายให้นักเรียนสรุปความรู้ลงในแบบสรุปเนื้อหาและทำใบงานที่ 7 เป็นการบ้าน

สื่อ / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 7
2. ใบงานที่ 7
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
5. กวีนา นาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
6. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
7. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และ ทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 7 - การทำใบงานที่ 7 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการ ประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 7 - ใบงานที่ 7 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 7 ได้ ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่าง น้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านคุณลักษณะอัน พึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน <u>ผ่าน</u>

ใบงานที่ 7

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. y = (x-1)^5$$

$$2. y = (x^2 - 1)^4$$

$$3. y = \sqrt{x-1}$$

$$4. y = (x-3)^3(2x+1)$$

$$5. s = \frac{1}{(t^2 - 3t + 2)^2}$$

$$6. s = (2t^2 - 1)^{-3}$$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. f(x) = 3x + 1$$

$$2. f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$3. f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$4. f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

$$2) f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 6$$

$$3) f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

4. สุทธิพงษ์ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 16t^2$ เมตร ในเวลา t วินาที จงหา

1. ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที

2. ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที

3. ความเร่งขณะวินาที $t =$ ใดๆ

4. ความเร่งขณะเวลา $t = 5$ วินาที

แบบสรุปเนื้อหา

เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและอนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....
 ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันคอมโพสิท คือ

.....

.....

.....

2. กฎลูกโซ่ มีสูตรดังนี้

.....

.....

.....

3. ถ้าให้ $u = f(x)$ จะได้ $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(u)$
 นั่นคือ ถ้า $u = f(x)$ และ $y = g(u)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} =$$

4. อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน หมายถึง

.....

.....

.....

5. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ

.....

6. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 คือ

.....

7. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 5 คือ

.....

8. ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ คือ

.....

9. ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ คือ

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
เวลา 5 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ให้ $f'(x)$ เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x ใด ๆ

1. ถ้า $f'(x) > 0$ แล้วฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และถ้า $f'(x) < 0$ แล้วฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด
2. ถ้า $f'(x) = 0$ ที่จุด $x = c$ แล้วเราเรียก x ว่าค่าวิกฤตของ f และค่า $y = f(c)$ จะเป็น
 - ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวกเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c (หรืออาจทดสอบด้วยการหาอนุพันธ์อันดับสอง จะได้ $f''(x) > 0$)
 - ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c (หรืออาจทดสอบด้วยการหาอนุพันธ์อันดับสอง จะได้ $f''(x) < 0$)
3. ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าของฟังก์ชันที่มีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดในช่วง $[a, b]$ เมื่อฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และสามารถนำความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ได้
2. บอกความหมายของค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งหาค่าดังกล่าวได้
3. หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้
4. หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
5. นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถในการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล

3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรรณญาณ

สาระการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
2. การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน
3. การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน
4. โจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการเชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน เพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียนดังนี้ “ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันของคนเรานั้น มีหลายปัญหาที่ให้ความสนใจกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของปริมาณบางปริมาณ อาทิเช่น
 - หากต้องการสร้างรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยลวดหนามที่มีความยาวจำกัด โดยให้มีพื้นที่มากที่สุด จะต้องจึงลวดหนามอย่างไร หรือ
 - เมื่อใดอุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด และอุณหภูมิสูงสุดเป็นเท่าใด ในการเกิดปฏิกิริยาเคมีหนึ่ง ซึ่งมีอุณหภูมิสัมพันธ์กับเวลา หรือ
 - ในทางกลไกกรรม จะต้องใส่ปุ๋ยเท่าใดเพื่อจะได้ผลผลิตมากที่สุด หรือ
 - ในทางอุตสาหกรรม จะต้องผลิตบรรจุภัณฑ์อย่างไรเพื่อให้มีปริมาตรสูงสุด เมื่อใช้วัตถุดิบเท่ากัน

เหล่านี้เป็นต้น ซึ่งถ้าเราสามารถจำลองปัญหาดังกล่าวเป็นฟังก์ชัน กล่าวคือ ถ้าปัญหาดังกล่าวสามารถเปลี่ยนเป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ได้แล้ว เช่น สมมติว่า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เขียนขึ้นจากปัญหาที่ต้องการทราบว่า x มีค่าเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ y มีค่าสูงสุด หรือ y มีค่าต่ำสุด การแก้ปัญหาดังกล่าว ก็จะลดความยุ่งยากลง”

2. จากนั้น ครูทบทวนความรู้เรื่องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง โดยการเชื่อมโยงกับความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว ดังรายละเอียดต่อไปนี้

“สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดอาจทำได้โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ เช่น กำหนด $y = 6x - x^2$

เมื่อจัด $y = 6x - x^2$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$y = -(x^2 - 6x + 3^2) + 3^2 = 9 - (x - 3)^2$$

โดย y จะมีค่าสูงสุดเป็น 9 เมื่อแทน $x = 3$ ซึ่งทำให้ $(x - 3)^2 = 0$

แต่ถ้าฟังก์ชันมีกำลังของ x มากขึ้น หรือเขียนในรูปกำลังสองสมบูรณ์ไม่ได้ การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดอาจทำได้โดยการเขียนกราฟของฟังก์ชัน แล้วดูค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจากกราฟ แต่ผลลัพธ์มักคลาดเคลื่อน ค่าซ้ำและไม่สะดวก จึงไม่นิยมใช้

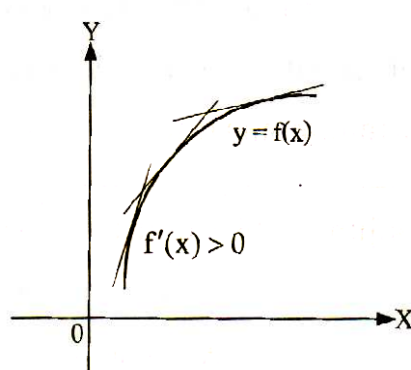
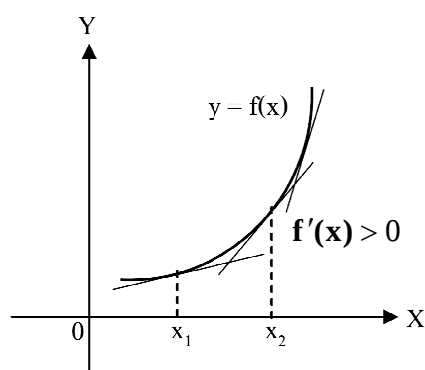
และนอกจากวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว เราอาจพิจารณาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้จากอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งต้องอาศัยความรู้พื้นฐานในเรื่องของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ดังที่จะได้ศึกษาในลำดับต่อไป”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด พร้อมทั้งให้นักเรียนพิจารณาความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งของกราฟของฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ดังต่อไปนี้

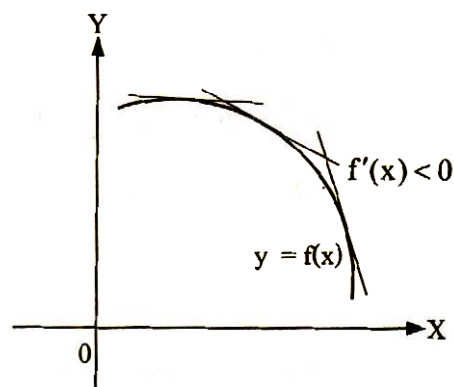
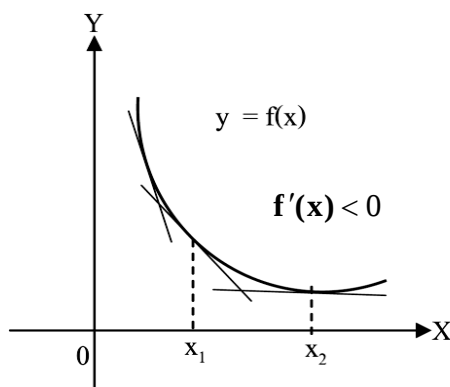
กำหนด f เป็นฟังก์ชันจาก $\square$ ไป $\square$ และ $A \subseteq D_f$

- ถ้า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) < f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $f'(x) > 0$



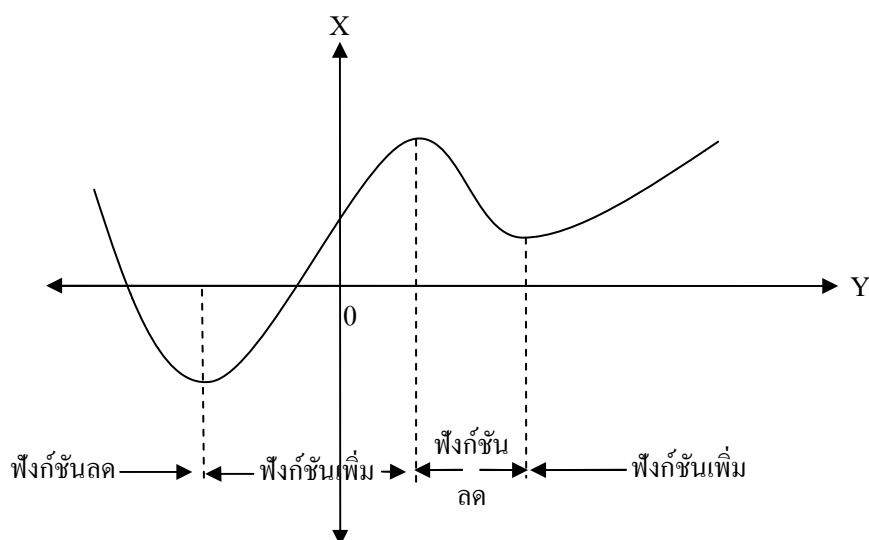
คำอธิบาย จากรูป เป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจากเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นด้วย และจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนบวก (เส้นสัมผัสเส้นโค้งทำมุมแหลมกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา) นั่นคือ $f'(x) > 0$

- ถ้า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) > f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด และ $f'(x) < 0$



คำอธิบาย จากรูป เป็นกราฟของฟังก์ชันลด เนื่องจากเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะลดลง และจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนลบ (เส้นสัมผัสเส้นโค้งทำมุมป้านกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา) นั่นคือ $f'(x) < 0$

2. ครูอธิบายเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนพิจารณารูปกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าในบางช่วงฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด ในบางช่วงฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

3. ครูให้ข้อสรุปดังนี้ “จากการศึกษาข้างต้น จะเห็นว่า ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้างนั้น นอกจากการพิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดสองจุดแล้ว อาจทำได้โดยการพิจารณาค่าของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้อีกด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $A \subset D_f$

1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง A
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง A

4. ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f

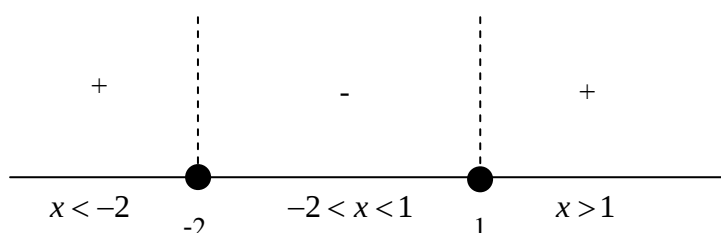
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x^2 + x - 2)$$

$$= 6(x-1)(x+2)$$

ตรวจสอบค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, -2)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-2, 1)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -2)$ และบนช่วง $(1, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-2, 1)$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ช่วงของจำนวนจริง และเรื่องอสมการ)

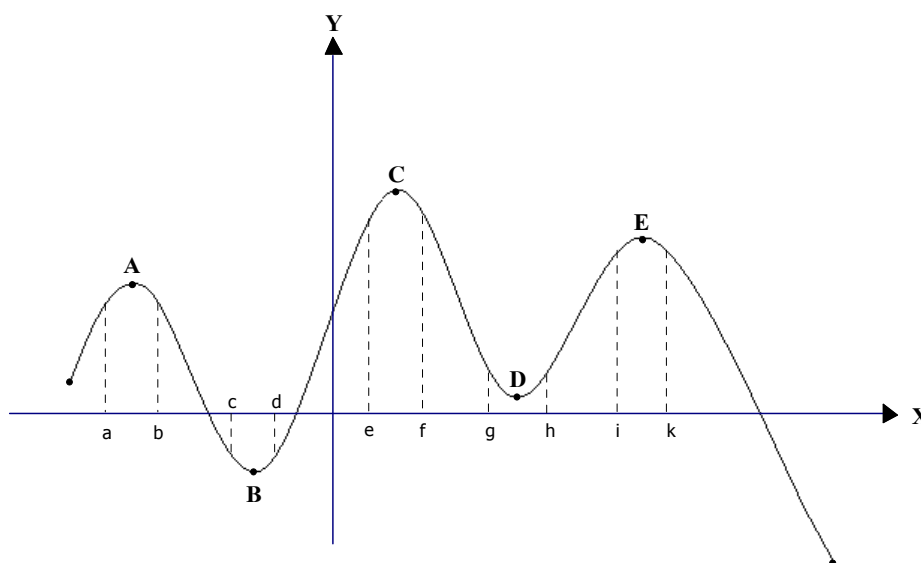
5. ครูกำลังว่า “ จากความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในทฤษฎีบท 1 นี้ สามารถนำไปใช้ในการพิจารณาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้ แต่ก่อนที่จะพิจารณาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน เราควรรู้จักค่าต่ำสุดสัมพัทธ์กับค่าสูงสุดสัมพัทธ์เสียก่อน ดังบทนิยามต่อไปนี้

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของฟังก์ชัน f และเรียก $(c, f(c))$ ว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของฟังก์ชัน f และเรียก $(c, f(c))$ ว่าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

6. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในบทนิยามดังกล่าว ครูให้นักเรียนพิจารณารูปของฟังก์ชันต่อไปนี้



จากกราฟ จุด A, C และ E เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ส่วนจุด B และ D เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ กล่าวคือ

ที่จุด A ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_1)$ เนื่องจากมีช่วง (a, b) ซึ่ง $x_1 \in (a, b)$ และ $f(x_1) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b)

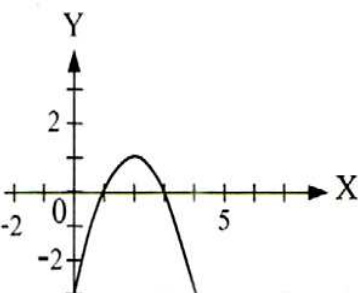
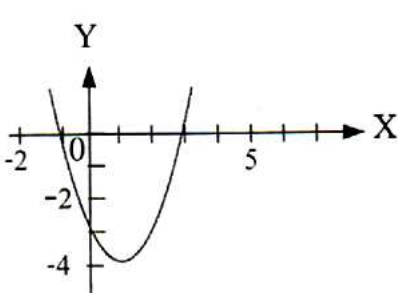
ที่จุด C ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_3)$ เนื่องจากมีช่วง (e, f) ซึ่ง $x_3 \in (e, f)$ และ $f(x_3) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (e, f)

ที่จุด E ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_5)$ เนื่องจากมีช่วง (i, k) ซึ่ง $x_5 \in (i, k)$ และ $f(x_5) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (i, k)

ที่จุด B ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_2)$ เนื่องจากมีช่วง (c, d) ซึ่ง $x_2 \in (c, d)$ และ $f(x_2) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (c, d)

ที่จุด D ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x_4)$ เนื่องจากมีช่วง (g, h) ซึ่ง $x_4 \in (g, h)$ และ $f(x_4) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (g, h)

7. จากนั้น ครูกำหนดกราฟเพื่อให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $f(x)$ และ $f'(x)$ ที่จุด $x = a$ ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด โดยเขียน + และ - เมื่อค่าของฟังก์ชันในช่วงนั้นเป็นจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบตามลำดับ ลงในตารางต่อไปนี้

$f(x)$	จุดสูงสุดหรือ จุดต่ำสุด	$x < a$	$x = a$		$x > a$
		$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
1. 	$(a, f(a)) = (2, 1)$	+	1	0	-
2. 	$(a, f(a)) = (1, -4)$	-	-4	0	+

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง)

8. กรุให้นักเรียนช่วยกันสรุปสิ่งที่สังเกตได้จากตาราง ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ดังนี้

“จากตารางพิจารณาค่าของ $f(x)$ และ $f'(x)$ โดยยึดจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์เป็นช่วงแบ่ง ซึ่งจะได้ว่า

- ฟังก์ชันในข้อ 1 ในช่วง $x < 2$ ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น
 ในขณะที่ $x = 2$ ค่าของ $f(x)$ จะเป็นค่าสูงสุด
 ในช่วง $x > 2$ ค่าของ $f(x)$ เริ่มลดลง
- ฟังก์ชันในข้อ 2 ในช่วง $x < 1$ ค่าของ $f(x)$ จะลดลง
 ในขณะที่ $x = 1$ ค่าของ $f(x)$ จะเป็นค่าต่ำสุด
 ในช่วง $x > 1$ ค่าของ $f(x)$ เริ่มเพิ่มขึ้น
- ณ จุดที่เป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของฟังก์ชัน จะเป็นจุดเปลี่ยนจากค่าบวกเป็นค่าลบ หรือจากค่าลบเป็นค่าบวก (จุดที่ $f'(x) = 0$)”

9. จากข้อค้นพบและสิ่งที่นักเรียนช่วยกันสรุป กรุณามาสรุปเป็นกรณีทั่วไปและนำเสนอความหมายของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าวิกฤต ดังรายละเอียดต่อไปนี้

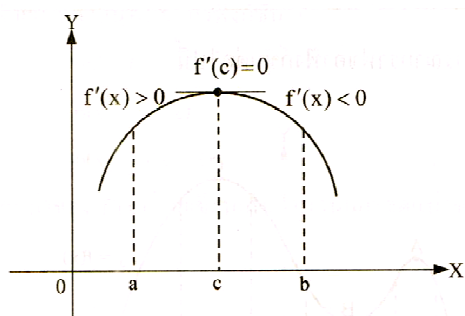
ทฤษฎีบท 2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ หาค่าได้ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f จะได้ว่า $f'(c) = 0$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ บนช่วง (a, b) ค่าของ $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต** (critical value) ของฟังก์ชัน f

หมายเหตุ ค่าวิกฤตของ f นี้ นอกจากจะเป็นค่าที่นำไปแทน x ใน $f'(x)$ แล้วทำให้ $f'(x)$ เป็นศูนย์แล้วยังเรียกจำนวนจริง c ที่ทำให้ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ว่าค่าวิกฤตด้วย แต่ในที่นี้ขอกล่าวถึงค่าวิกฤตที่นำไปแทน x ใน $f'(x)$ แล้วทำให้ $f'(x) = 0$

ดังนั้น ในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนจะต้อง

1. หาค่าวิกฤต c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ ก่อน
2. พิจารณาว่าจุดที่ $x = c$ นั้นเป็นจุดแบ่งที่ทำให้ค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ หรือเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวกหรือไม่



รูปที่ 1

2.1 ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์นั้นเท่ากับ $f(c)$

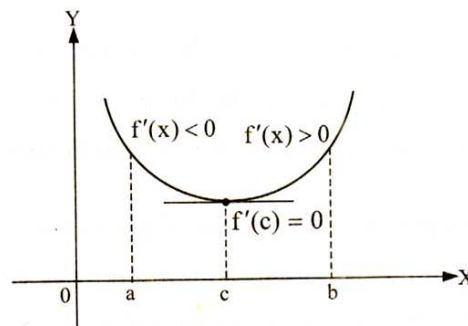
และถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ จะเห็นว่า มีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (c, b)

นั่นคือ ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x) < 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ และสังเกตว่า $f'(c) = 0$ ดังรูปที่ 1

2.2 ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นเท่ากับ $f(c)$

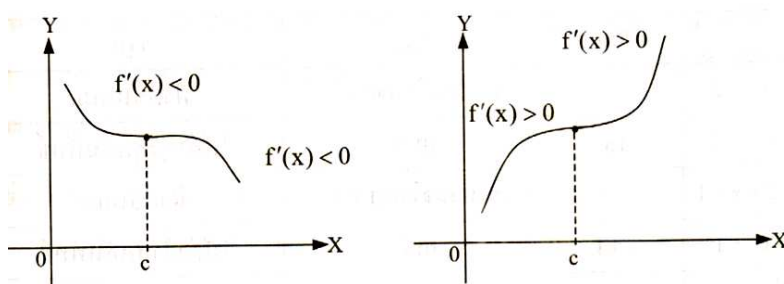
และถ้าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ จะเห็นว่า มีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (c, b)

นั่นคือ ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x) > 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ และสังเกตว่า $f'(c) = 0$ ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

2.3 ถ้าค่าของ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ หรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f
 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนบวกเป็นจำนวนลบ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c
 แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นรอบ ๆ c
 แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

10. ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าวิกฤต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

(2) $f(x) = x^2 - 2x + 8$

(3) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

วิธีทำ (1) จาก $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

จะได้ $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $x = -2$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่าคือ -2 และ 1

ต่อไปจะพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์จากตารางต่อไปนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	สรุป
$x < -2$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม
$x = -2$	13	ศูนย์	ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-2 < x < 1$		จำนวนจริงลบ (-)	ฟังก์ชันลด
$x = 1$	-14	ศูนย์	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 1$		จำนวนจริงบวก(+)	ฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-2) = 13$ และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(1) = -14$

(2) จาก $f(x) = x^2 - 2x + 8$

จะได้ $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $x = 1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ 1

ต่อไปจะพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์จากตารางต่อไปนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	สรุป
$x < 1$		จำนวนจริงลบ (-)	ฟังก์ชันลด
$x = 1$	7	ศูนย์	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 1$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(1) = 7$

(3) จาก $f(x) = x^3 - 3x - 2$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $x = -1$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่าคือ -1 และ 1

ต่อไปจะพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์จากตารางต่อไปนี้

	$f(x)$	$f'(x)$	สรุป
$x < -1$		จำนวนจริงบวก (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม
$x = -1$	0	ศูนย์	ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
$-1 < x < 1$		จำนวนจริงลบ (-)	ฟังก์ชันลด
$x = 1$	-4	ศูนย์	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
$x > 1$		จำนวนจริงบวก(+)	ฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-1) = 0$ และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(1) = -4$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ช่วงของจำนวนจริง และเรื่องอสมการ)

11. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “นอกจากการพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันแล้ว เรายังสามารถใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 มาช่วยในการพิจารณาว่า ณ ค่าวิกฤตนั้น ๆ ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่ โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง A ใด ๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

คำอธิบายเพิ่มเติม ถ้า $f''(c)=0$ แล้วเราไม่สามารถสรุปได้ว่า $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เพราะบางครั้ง $f(c)$ อาจเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือ $f(c)$ อาจเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือบางครั้ง $f(c)$ อาจจะไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เลยก็ได้ ดังนั้นในกรณีที่อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้หรือเท่ากับศูนย์ ณ ค่าวิกฤต เราจะพิจารณาโดยใช้การเปลี่ยนแปลงค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันที่จุดบริเวณใกล้เคียงค่าวิกฤตนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3

12. ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 15$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 15$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$$

$$= 3(x^2 + 4x - 12)$$

$$= 3(x+6)(x-2)$$

$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \text{ จะได้ } x = -6 \text{ หรือ } x = 2$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่าคือ -6 และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน จะได้

$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$$

$$f''(-6) = -24 \quad \text{ซึ่ง } -24 < 0$$

$$f''(2) = 24 \quad \text{ซึ่ง } 24 > 0$$

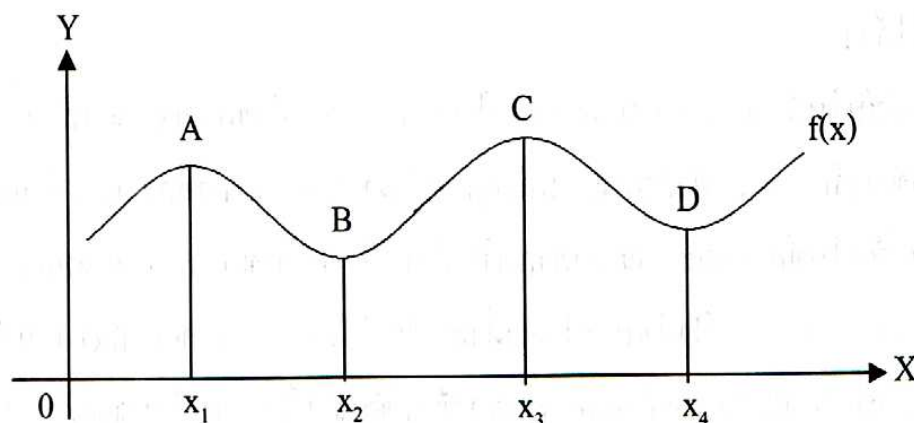
ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -6$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ

$$f(-6) = (-6)^3 + 6(-6)^2 - 36(-6) + 15 = -216 + 216 + 216 + 15 = 231$$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2) = (2)^3 + 6(2)^2 - 36(2) + 15 = -25$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบและเรื่องอสมการ)

13. จากนั้น ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าที่หาได้ภายในช่วงที่กำหนดให้



จากรูป นักเรียนควรสรุปได้ว่า

- f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_1 และ x_3 และ $f(x_1) < f(x_3)$
- f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด x_2 และ x_4 และ $f(x_2) < f(x_4)$

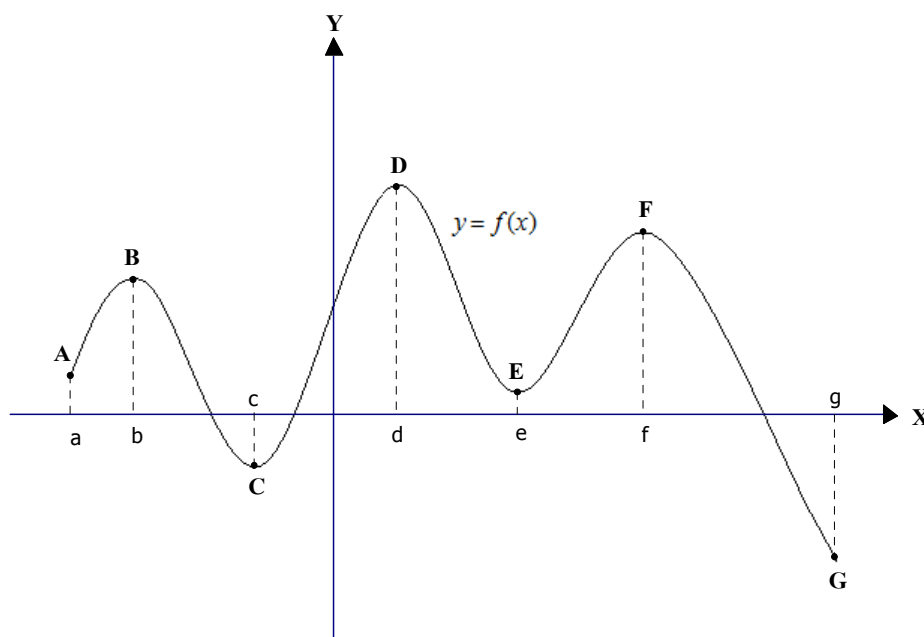
14. ครูสรุปเพิ่มเติมว่า “เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ เราอาจหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันนั้นได้หลายค่า และอาจบอกได้ว่าค่าใดมีค่ามากที่สุดหรือค่าใดมีค่าน้อยที่สุด แต่ค่าดังกล่าวอาจไม่ใช่ค่ามากที่สุดหรือค่าน้อยที่สุดในบรรดาค่าของ $f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f เราจะเรียกค่าของ $f(x)$ ที่มากที่สุดสำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) และเรียกค่า $f(x)$ ที่น้อยที่สุดสำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f
 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f

15. ครูตั้งคำถามให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อเน้นให้นักเรียนได้เห็นความแตกต่างระหว่างค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์กับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ดังนี้

- “ 1. จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดสูงสุดสัมบูรณ์ มีความแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร
 2. จุดต่ำสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ มีความแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร ”

จากนั้น ครูตอบคำถามดังกล่าวโดยใช้กราฟต่อไปนี้



จากกราฟ ครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า

- (1) จุดใดบ้างเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบ จุด B, D และ F)
- (2) จุดใดบ้างเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบ จุด C และ จุด E)
- (3) จุดใดเป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์ และมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เป็นเท่าใด (ตอบ จุด D เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์ และมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ $f(d)$)
- (4) จุดใดเป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ และมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เป็นเท่าใด (ตอบ จุด G เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ และมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เท่ากับ $f(g)$)

16. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “จากการศึกษาข้างต้นจะพบว่า ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีโดเมนเป็น $[a, b]$ ใด ๆ

- เราสามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ได้เสมอ
- การพิจารณาจุดต่ำสุดสัมพัทธ์และจุดสูงสุดสัมพัทธ์จะไม่พิจารณาจุดปลายของ $[a, b]$ ดังนั้น จุด $x = a$ และ $x = b$ จึงไม่เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์หรือจุดสูงสุดสัมพัทธ์
- การพิจารณาจุดต่ำสุดสัมบูรณ์หรือจุดสูงสุดสัมบูรณ์นั้นต้องพิจารณาจุดปลายของ $[a, b]$ ด้วย นั่นคือ จุด $x = a$ และ $x = b$ อาจเป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์หรือจุดสูงสุดสัมบูรณ์ก็ได้
- บางฟังก์ชัน ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์นั้นอาจเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ด้วยก็ได้ (เช่นจุด D) แต่บางฟังก์ชันค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์นั้นอาจเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงปิดนั้นก็ได้ (เช่นจุด G)

- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันหนึ่ง ๆ จะมีเพียงค่าเดียว (เพราะเป็นค่าที่ต่ำสุดหรือสูงสุดในโดเมนนั้น) ส่วนค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์มีได้หลายค่า (เพราะเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุดในช่วงเล็ก ๆ รอบจุดวิกฤต)”

17. จากนั้นครูสรุปขั้นตอนของการหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

ขั้นตอนของการหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้วเราสามารถหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงปิด $[a, b]$
2. หาค่าฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1
3. หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$
4. เปรียบเทียบค่าที่ได้จากข้อ 2 และข้อ 3 ซึ่งจะทำได้ข้อสรุปว่า

ค่ามากที่สุดจากข้อ 2 และข้อ 3 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ค่าน้อยที่สุดจากข้อ 2 และข้อ 3 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f เมื่อ $f(x) = x^3 - 12x + 1$ บนช่วงปิด $[0, 3]$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $x = 2$ หรือ $x = -2$ แต่ $-2 \notin [0, 3]$

ดังนั้น ค่าวิกฤตในช่วงปิด $[0, 3]$ คือ 2

ต่อไปจะคำนวณหาค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 2$ และที่จุดปลายของช่วง $[0, 3]$ คือ $x = 0$ และ $x = 3$ จะได้

$$f(2) = 2^3 - 12(2) + 1 = 8 - 24 + 1 = -15$$

$$f(0) = 0^3 - 12(0) + 1 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 12(3) + 1 = 27 - 36 + 1 = -8$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=0$ ซึ่งเท่ากับ $f(0)=1$
 f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=2$ ซึ่งเท่ากับ $f(2)=-15$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ช่วงของจำนวนจริง)

18. ครูกล่าวว่า “เราสามารถนำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดนี้มาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาได้ โดยจะต้องพิจารณาเงื่อนไขของฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีโดเมนเป็นอย่างไร และปัญหาดังกล่าวต้องการให้หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์”

19. จากนั้น ครูนำเสนอหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1. ทำความเข้าใจกับปัญหาอย่างละเอียดให้ทราบแน่นอนว่าต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของอะไร ให้กำหนดสิ่งนั้นเป็น y หรือตัวแปรอื่น ๆ ตามความเหมาะสมและควรวาดรูปประกอบ
2. สมมติให้ y เป็นตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงในปัญหา โดยที่ค่าของ y จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับค่าของ x
3. เขียน y ในรูปตัวแปร x
4. หาค่า $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่า y ที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเทียบกับตัวแปร x
5. ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x ซึ่งคือค่าวิกฤตของฟังก์ชันในข้อ 3
6. นำค่าวิกฤตในข้อ 5 มาทำการตรวจสอบว่าทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือมีค่าต่ำสุดหรือไม่

20. ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 5-8 ซึ่งเป็นโจทย์ปัญหาที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์จริงในชีวิตประจำวัน ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางการค้า กลไกกรรม เศรษฐศาสตร์และปัญหาในวงการแพทย์

ตัวอย่างที่ 5 พ่อค้าซื้อข้าวสารมาถึงละ 50 บาท ถ้าเขาขายข้าวสารไปถึงละ 80 บาท ใน 1 เดือนจะขายได้ 1,000 ถัง แต่ถ้าเขาขายลดลงถึงละ x บาท เขาจะขายข้าวสารได้เพิ่มขึ้น $50x$ ถังต่อเดือน ดังนั้นเขาจะได้กำไรมากที่สุดจากจำนวนที่ขายได้ใน 1 เดือน เมื่อเขาตั้งราคาขายถึงละเท่าไร

วิธีทำ ครูให้นักเรียนลองวิเคราะห์ปัญหา “โจทย์ต้องการราคาขายที่ทำให้ได้กำไรมากที่สุดจากการขายได้ใน 1 เดือน นั้นหมายความว่า เราต้องสร้างฟังก์ชันของกำไร (ตัวแปรตาม) ที่ขึ้นกับราคาขาย (ตัวแปรต้น) แล้วหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันดังกล่าว”

ให้ y แทนกำไรจากการขายข้าวสารในเวลา 1 เดือน

ในเวลา 1 เดือน เขาขายลดลงถึงละ x บาท จากราคาถึงละ 80 บาท

ดังนั้น เขาตั้งราคาขายถึงละ $80 - x$ บาท เมื่อ $0 \leq x \leq 80$

และเขาจะขายข้าวสารได้เพิ่มขึ้น $50x$ ถึงต่อเดือนจาก 1000 ถึง

จะได้ว่า เขาจะขายข้าวสารได้ $1,000 + 50x$ ถึง

เนื่องจากพ่อค้าซื้อข้าวสารมาถึงละ 50 บาท

ดังนั้น ราคาต้นทุนเท่ากับ $50(1,000 + 50x) = 50,000 + 2,500x$ บาท

และ ราคาขายเท่ากับ $(80 - x)(1,000 + 50x) = 80,000 + 3,000x - 50x^2$ บาท

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= \text{ราคาขาย} - \text{ราคาทุน} \\ &= (80,000 + 3,000x - 50x^2) - (50,000 + 2,500x) \\ &= 30,000 + 500x - 50x^2 \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาค่าสูงสุดของ y

$$y' = 500 - 100x$$

ถ้า $y' = 0$ จะได้ $500 - 100x = 0$ หรือ $x = 5$

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ 5

จาก $y' = 500 - 100x$ จะได้ $y'' = -100$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x = 5$ แล้ว $y'' = -100 < 0$

แสดงว่า ถ้า $x = 5$ แล้ว y จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $= 30,000 + 500(5) - 50(5)^2 = 31,250$

ต่อไปจะพิจารณาที่จุดปลายช่วง

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 30,000 + 500(0) - 50(0)^2 = 30,000$

และเมื่อ $x = 80$ จะได้ $y = 30,000 + 500(80) - 50(80)^2 = -250,000$

ดังนั้น $x = 5$ จะให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0, 80]$

เพราะฉะนั้น พ่อค้าต้องตั้งราคาขายถึงละ $80 - 5 = 75$ บาท เขาจึงจะได้กำไรมากที่สุด

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ฟังก์ชันกำลังสอง)

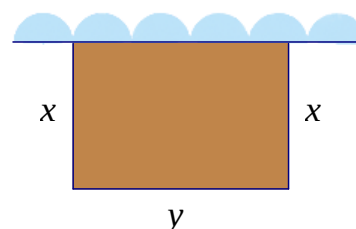
ตัวอย่างที่ 6 มีเงินอยู่ 900 บาท ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินซึ่งอยู่ติดกับแม่น้ำให้ได้ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยไม่ล้อมฝั่งแม่น้ำ จะต้องล้อมให้แต่ละด้านยาวเท่าไรจึงจะได้เนื้อที่มากที่สุด ถ้าค่าล้อมรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเท่ากับ 3 บาทต่อฟุต ค่าล้อมรั้วอีก 2 ด้านที่เหลือเท่ากับ 2 บาทต่อฟุต

วิธีทำ ครูให้นักเรียนลองวิเคราะห์ปัญหา “โจทย์ต้องการความยาวแต่ละด้านของรั้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ล้อมรอบที่ดินแล้วได้เนื้อที่มากที่สุด นั่นหมายความว่าเราต้องสร้างฟังก์ชันของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ตัวแปรตาม) ที่ขึ้นกับความยาวด้านแต่ละด้าน (ตัวแปรต้น) แล้วหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันดังกล่าว”

ให้ x เป็นความยาวของด้านที่ยาวเท่ากันได้ (ฟุต)

y เป็นความยาวของด้านที่เหลือ (ฟุต)

A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ตารางฟุต)



ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ $A = xy$ เมื่อ $0 \leq x \leq 225$

เนื่องจากค่าล้อมรั้วด้านขนานกับแม่น้ำเท่ากับ 3 บาทต่อฟุต ค่าล้อมรั้วอีก 2 ด้านที่เหลือเท่ากับ 2 บาทต่อฟุต จะได้ ค่าล้อมรั้วด้านที่ขนานกับแม่น้ำเท่ากับ $3y$ บาท

และค่าล้อมรั้วด้านที่เหลือเท่ากับ $2(2x) = 4x$ บาท

ดังนั้น $4x + 3y = 900$

$$y = \frac{900 - 4x}{3}$$

$$= 300 - \frac{4}{3}x$$

นั่นคือ $A = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right) = 300x - \frac{4}{3}x^2$

$$A' = 300 - \frac{8}{3}x$$

ถ้า $A' = 0$ จะได้ $300 - \frac{8}{3}x = 0$ หรือ $x = \frac{900}{8} = 112.5$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน A คือ 112.5

จาก $A' = 300 - \frac{8}{3}x$

$$A'' = -\frac{8}{3} < 0$$

แสดงว่า ถ้า $x = 112.5$ แล้ว A จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $300(112.5) - \frac{4}{3}(112.5)^2 = 16,875$

ต่อไปจะพิจารณาที่จุดปลายช่วง

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $A = 0$

และเมื่อ $x = 225$ จะได้ $A = 0$

ดังนั้น $x = 112.5$ จะให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0, 225]$

$$\text{และจะได้ } y = 300 - \frac{4}{3} \times \frac{900}{8} = 150$$

เพราะฉะนั้น จะต้องล้อมรั้วให้ด้านที่ขนานกับแม่น้ำยาว 150 ฟุต และด้านที่เหลือยาวด้านละ 112.5 ฟุต

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ฟังก์ชันกำลังสอง)

ตัวอย่างที่ 7 ในการทดลองทางกลศาสตร์ครั้งหนึ่ง เป็นที่ยอมรับกันว่าจะได้ผลผลิตมากขึ้นถ้าใส่ปุ๋ยมากขึ้น (ไม่ใส่มากจนเกินไป) ให้ f เป็นจำนวนปุ๋ยที่ใช้หน่วยเป็นกิโลกรัมต่อไร่ c เป็นปริมาณผลผลิตที่ได้หน่วยเป็นถังต่อไร่ ถ้า $c = 20 + 24f - f^2$ แล้วจะต้องใช้ปุ๋ยเท่าใดจึงจะได้ผลผลิตมากที่สุด

วิธีทำ ครูให้นักเรียนลองวิเคราะห์ปัญหา “โจทย์ต้องการจำนวนปุ๋ยที่ทำให้ได้ปริมาณผลผลิตมากที่สุด นั่นหมายความว่าเราต้องสร้างฟังก์ชันของปริมาณผลผลิต (ตัวแปรตาม) ที่ขึ้นกับจำนวนปุ๋ย (ตัวแปรต้น) แล้วหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันดังกล่าว”

ให้ $c(f)$ เป็นปริมาณผลผลิตที่ได้ (ถังต่อไร่)

f เป็นจำนวนปุ๋ยที่ใช้ (กิโลกรัมต่อไร่)

$$\text{จะได้ } c(f) = 20 + 24f - f^2$$

$$c'(f) = 24 - 2f$$

$$\text{ถ้า } c'(f) = 0 \text{ จะได้ } 24 - 2f = 0 \text{ หรือ } f = 12$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน c คือ 12

$$\text{จาก } c'(f) = 24 - 2f$$

$$c''(f) = -2$$

$$c''(12) = -2 < 0$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน c มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $f = 12$ และมีค่าเท่ากับ $c(12) = 164$

ดังนั้น จะต้องใช้ปุ๋ย 12 กิโลกรัมต่อไร่ จึงจะได้ผลผลิตมากที่สุด

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ ฟังก์ชันกำลังสอง)

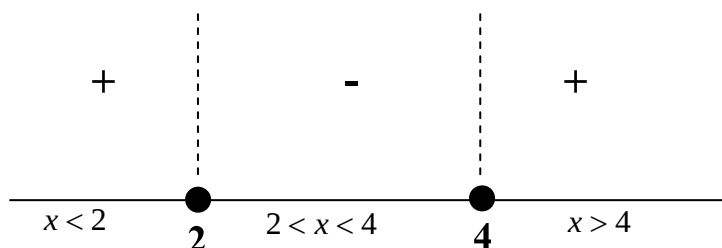
ตัวอย่างที่ 8 ในการวิเคราะห์ยาชนิดหนึ่งพบว่า เมื่อนำยานี้มา 10 ซี.ซี ทดลองฉีดเข้าไปในคนใดคนหนึ่ง จะพบว่าหลังจากนั้น x ชั่วโมง ความดันโลหิตของคน ๆ นั้นเปลี่ยนไปตามสมการ

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \quad \text{สมการนี้เป็นจริงเฉพาะที่ } 0 \leq x \leq 6 \quad \text{เพราะจะหมดฤทธิ์ยาหลังจากฉีดแล้ว 6}$$

ชั่วโมง อยากทราบว่าภายใน 6 ชั่วโมงนี้ความดันของผู้นี้เป็นอย่างไร

วิธีทำ ครูให้นักเรียนลองวิเคราะห์ปัญหา “โจทย์ต้องการทราบการเปลี่ยนแปลงของความดันโลหิตหลังจากที่ฉีดยาชนิดนี้ภายในเวลา 6 ชั่วโมง นั่นคือ เราต้องหาว่าฟังก์ชันของความดันโลหิตจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดในช่วงใด”

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad f(x) &= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \\ \text{จะได้} \quad f'(x) &= x^2 - 6x + 8 \\ \text{ถ้า} \quad f'(x) = 0 \quad &\text{จะได้} \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \\ &\quad (x-2)(x-4) = 0 \\ \therefore \quad x &= 2 \quad \text{หรือ} \quad x = 4 \end{aligned}$$



$$\text{ถ้า } 0 < x < 2 \quad \text{จะได้} \quad f'(x) > 0$$

$$\text{ถ้า } 2 < x < 4 \quad \text{จะได้} \quad f'(x) < 0$$

$$\text{ถ้า } 4 < x < 6 \quad \text{จะได้} \quad f'(x) > 0$$

ดังนั้น จะได้ว่าในสองชั่วโมงแรก ความดันโลหิตของชายคนนั้นจะเพิ่มขึ้น
และในสองชั่วโมงต่อมา ความดันโลหิตจะลดลง
และในสองชั่วโมงสุดท้าย ความดันโลหิตจะเพิ่มขึ้น

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ และฟังก์ชันกำลังสอง)

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปเรื่องฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ดังนี้

วิธีการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

จากฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่โจทย์กำหนดให้

(1) หา $f'(x)$

(2) ให้ $f'(x) = 0$

หาค่า x ที่ทำให้สมการนั้นเป็นจริง ซึ่งค่า x ที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต

(3) นำค่าวิกฤตไปตรวจสอบ ซึ่งมีวิธีตรวจสอบ 2 วิธี คือ

3.1 ตรวจสอบโดยพิจารณาจากความชันของเส้นสัมผัส

- ถ้าความชันเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้าความชันเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3.2 ตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังนี้

- ถ้า $f''(x) > 0$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(x) < 0$ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(x) = 0$ แสดงว่าตรวจสอบวิธีนี้ได้ไม่ได้ ต้องตรวจสอบโดยวิธีตรวจสอบจากความชันของเส้นสัมผัส

(4) กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

4.1 หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

4.2 หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$

4.3 นำค่าที่ได้จากข้อ 1 และ 2 มาเปรียบเทียบกัน ค่ามากที่สุดคือค่าสูงสุดสัมบูรณ์
ค่าที่น้อยที่สุด คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

(1) อ่านโจทย์อย่างละเอียดจนทราบว่าโจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

(2) ให้ $f(x)$ เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

(3) $f(x)$ ที่สร้างขึ้นต้องประกอบด้วยตัวแปรตัวเดียว

- (4) หาค่า $f'(x)$
 - (5) ให้ $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x
 - (6) นำค่าวิกฤตในข้อ 5 มาทำการตรวจสอบว่าทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดหรือไม่
 - (7) นำค่า x ที่ได้จากข้อ 6 ไปแทนค่าเพื่อหาค่า y ซึ่งเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามต้องการ
2. ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้รับลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 8 และ 9

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 8
2. ใบงานที่ 8 และ 9
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
8. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
9. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
10. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 8 - การทำใบงานที่ 8, 9 - การทำแบบสรุปรเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 8 - ใบงานที่ 8, 9 - แบบสรุปรเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 8 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 <u>ผ่าน</u> - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 <u>ผ่าน</u>
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปรเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน <u>ผ่าน</u>

ใบงานที่ 8

การประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาช่วงซึ่งทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = 2 - 2x - x^2$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$

2. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^2 - 8x - 7$

2. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

3. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ บนช่วง $[0, 5]$

2. $f(x) = x^3 + 5x - 4$ บนช่วง $[-3, -1]$

3. $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$ บนช่วง $[1, 5]$

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ บนช่วง $[-5, 6]$

ใบงานที่ 9

โจทย์ปัญหาการประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. ต้องการใช้ลวดหนามยาว 200 เมตร เพื่อล้อมที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งด้านหนึ่งอยู่ติดริมฝั่งแม่น้ำ และไม่ต้องล้อมรั้ว ถามว่าที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะมีพื้นที่มากที่สุดเมื่อมีด้านกว้างและด้านยาวเป็นเท่าไร
2. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแผ่นหนึ่งกว้าง 10 นิ้ว และยาว 16 นิ้ว ต้องการตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากันทุกมุม แล้วพับส่วนที่เหลือเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเปิด จะต้องตัดมุมทั้งสี่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละเท่าไร กล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด
3. ในการเกิดปฏิกิริยาทางเคมีครั้งหนึ่ง หาอุณหภูมิได้จากสมการ $C = 10 + 4t - 0.2t^2$ เมื่อ C เป็นอุณหภูมิซึ่งมีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที เมื่อใดอุณหภูมิจะขึ้นสูงสุดและอุณหภูมิสูงสุดเป็นเท่าใด
4. พ่อค้าคนหนึ่งผลิตสินค้าขายได้ x ชิ้นในหนึ่งสัปดาห์ โดยขายไปชิ้นละ p บาท ถ้าราคาและจำนวนสินค้าที่ขายได้มีความสัมพันธ์ ซึ่งเขียนในรูปสมการได้เป็น $p = 100 - 0.04x$ เขาจะต้องผลิตสินค้าออกขายสัปดาห์ละกี่ชิ้นจึงจะได้กำไรมากที่สุด ทั้งนี้ในการที่จะผลิตสินค้า x ชิ้น ต้องลงทุน $600 + 22x$ บาท



แบบสรุปเนื้อหา เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

- 1) ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ
.....
.....
- 2) ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ มีดังนี้
.....
.....
.....
.....
- 3) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ คือ
.....
.....
- 4) ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ มีดังนี้
.....
.....
.....
.....
- 5) หลักในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด มีดังนี้
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่องปฏิยานุพันธ์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
เวลา 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ กล่าวคือ

- การหาอนุพันธ์ คือ การหา $f'(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ มาให้
- การหาปฏิยานุพันธ์ คือ การหา $f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของปฏิยานุพันธ์ได้
2. หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรรณญาณ

สาระการเรียนรู้

ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนเรื่องปฏิยานุพันธ์ โดยการเชื่อมโยงกับความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว “การศึกษาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์นั้น จะเริ่มศึกษาโดยการกำหนดฟังก์ชัน f แล้วให้ผู้เรียนหาอนุพันธ์ของ f คือ f' แต่สำหรับการศึกษาเรื่องปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) เราจะศึกษาปัญหาที่ตรงกันข้ามกับปัญหาที่กล่าวมาแล้วข้างต้น นั่นคือ เมื่อกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' เราสามารถที่จะหาฟังก์ชัน f ได้ แต่ก่อนอื่นครูขอทบทวนความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันก่อน ดังนี้”

2. ครูเริ่มต้นด้วยการทบทวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

$f(x)$	$f'(x)$
$3x+2$	3
$x^2 + 2x + 1$	$2x + 2$
$x^2 + 2x - 12$	$2x + 2$
$x^3 + 1$	$3x^2$
$x^3 + \frac{1}{5}$	$3x^2$
$x^3 - 6$	$3x^2$

ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปว่า “การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^n$ หาได้จากสูตร $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ และจากตารางจะเห็นว่า ฟังก์ชันที่ต่างกันอาจมีอนุพันธ์เท่ากันได้ นั่นคือ ฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากันนั้นจะต่างกันเฉพาะค่าคงตัวเท่านั้น”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูเริ่มต้นด้วยการเชื่อมโยงกับปัญหาที่สำคัญในวิชาฟิสิกส์ นั่นคือปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนี้

ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ

กำหนด $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อ s แทนระยะทาง และ t แทนเวลา
ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ขณะเวลา t ใด ๆ เขียนแทนความเร็ว
ขณะเวลา t ใด ๆ ด้วย $v(t)$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{ds}{dt}$$

ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ

ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ เขียนแทน
ความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ ด้วย $a(t)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

“จากความรู้ดังกล่าว เราทราบว่าถ้ามีสมการการเคลื่อนที่แล้ว เราสามารถหาความเร็วของวัตถุได้
โดยการหาอนุพันธ์ และในทำนองเดียวกัน ถ้ามีสมการความเร็วของวัตถุแล้ว เราสามารถหาความเร่งของ
วัตถุได้โดยการหาอนุพันธ์ ในลำดับต่อไป เราจะทำการศึกษากระบวนการตรงกันข้าม กล่าวคือ เมื่อทราบ
ความเร็วของวัตถุแล้ว เราจะหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุได้อย่างไร หรือเมื่อทราบความเร่งของวัตถุแล้ว
เราจะหาความเร็วของวัตถุได้อย่างไร ดังตัวอย่างต่อไปนี้”

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ความเร็วของวัตถุ ณ ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v = 3t^2 + 4t$

เนื่องจากความเร็วของวัตถุ คือ $v = \frac{ds}{dt}$

จะได้ว่า $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$

จากนั้น ครูให้นักเรียนนึกย้อนกลับว่า สมการการเคลื่อนที่ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง s กับ t
ควรจะเป็นอย่างไรจึงจะได้ $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$

สมมติคาดคะเนว่าสมการของการเคลื่อนที่ คือ $s_1 = t^3 + t^2$

จะได้ $v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 3t^2 + 2t$

พบว่า $s_1 = t^3 + t^2$ ไม่ใช่สมการของการเคลื่อนที่ตามต้องการ

(ข้อสังเกต การคาดคะเนควรตั้งอยู่บนหลักการที่ว่า $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ นั่นคือ ฟังก์ชันก่อนหาอนุพันธ์จะมีดีกรีมากกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันอยู่หนึ่งเสมอ)

$$\text{ลองสมมติใหม่ ให้ } s_2 = t^3 + 2t^2$$

$$\text{คราวนี้จะเห็นได้ว่า } v_2 = \frac{ds_2}{dt} = 3t^2 + 4t$$

ดังนั้น $s_2 = t^3 + 2t^2$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ซึ่งให้ความเร็วตรงตามที่กำหนด ปัญหาที่ตามมาคือ ยังมีสมการของการเคลื่อนที่อื่นอีกหรือไม่ที่ให้ความเร็วตามที่กำหนด ลองพิจารณาสมการของการเคลื่อนที่ต่อไปนี้

$$\text{ถ้า } s_3 = t^3 + 2t^2 + 7$$

$$\text{จะได้ } v_3 = 3t^2 + 4t$$

$$\text{ถ้า } s_4 = t^3 + 2t^2 - 13$$

$$\text{จะได้ } v_4 = 3t^2 + 4t$$

$$\text{ถ้า } s_5 = t^3 + 2t^2 + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$\text{จะได้ } v_5 = 3t^2 + 4t$$

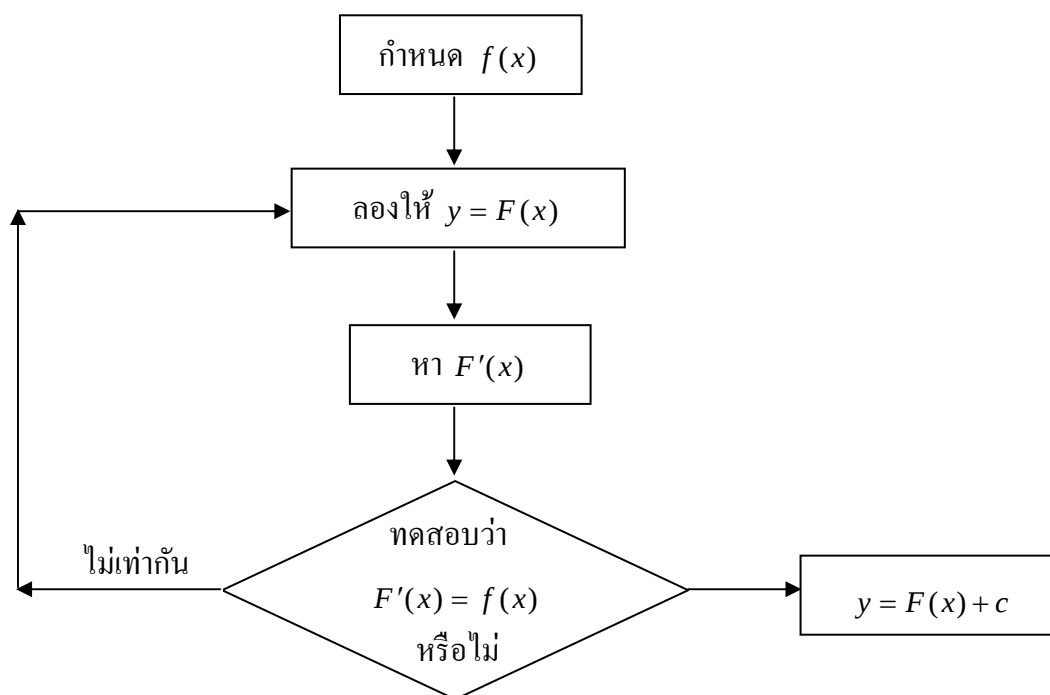
จากการหาสมการของการเคลื่อนที่ข้างต้น จะเห็นว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เท่ากัน คือ $v = 3t^2 + 4t$ เมตรต่อวินาที เมื่อสมการของการเคลื่อนที่คือ $s = t^3 + 2t^2 + c$

2. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “กระบวนการหาความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อทราบสมการของการเคลื่อนที่ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แต่สำหรับการหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อทราบความเร็วของวัตถุนั้นเป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ เรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์ และเรียกสมการของการเคลื่อนที่แต่ละสมการข้างต้นว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $v = 3t^2 + 4t$

3. ครูให้นิยามของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ ในกรณีทั่วไป ดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

4. จากนั้น ครูกำหนดฟังก์ชันและอธิบายการหาปฏิยานุพันธ์โดยใช้แผนผัง ดังต่อไปนี้



ครูให้นักเรียนเติม $F(x)$, $F'(x)$ และผลการเปรียบเทียบระหว่าง $F'(x)$ กับ $f(x)$ ลงในช่องว่างในตารางต่อไปนี้

$f(x)$	$y = F(x)$	$F'(x)$	$F'(x)$ เท่ากับ $f(x)$ หรือไม่
$4x$			
$5x$			
$2x-3$			
$x^2 + 2x - 1$			

ครูให้นักเรียนร่วมกันเฉลย พร้อมทั้งให้ข้อสังเกตว่า ค่าคงที่ c ของแต่ละคนไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

$f(x)$	$y = F(x)$	$F'(x)$	$F'(x)$ เท่ากับ $f(x)$ หรือไม่
$4x$	$2x^2$	$4x$	เท่ากัน
$5x$	$\frac{5x^2}{2}$	$5x$	เท่ากัน
$2x-3$	$x^2 - 3x + 2$	$2x-3$	เท่ากัน
$x^2 + 2x - 1$	$\frac{x^3}{3} + x^2 - x - 7$	$x^2 + 2x - 1$	เท่ากัน

5. ครุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $F(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

วิธีทำ จาก $F(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
 จะได้ $F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}(2x)$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

นั่นคือ $F'(x)$ เท่ากับ $f(x)$

ดังนั้น $F(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสมบัติของเลขยกกำลังและเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร)

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ ให้ $F_1(x) = x^3$ จะได้ $F_1'(x) = 3x^2$
 $F_2(x) = \frac{2x^3}{3}$ จะได้ $F_2'(x) = 2x^2$
 $F_3(x) = \frac{2x^3}{3} + 1$ จะได้ $F_3'(x) = 2x^2$
 $F_4(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{2}$ จะได้ $F_4'(x) = 2x^2$

นั่นคือ F_2, F_3, F_4 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2$

จะเห็นว่า ถ้าให้ $F(x) = \frac{2x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะได้ $F'(x) = 2x^2$

ดังนั้น $F(x) = \frac{2x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสมบัติของเลขยกกำลังและเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร)

ตัวอย่างที่ 4 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $f(x) = \frac{1}{x^5}$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^5}$
 จะหา $F(x)$ ที่ $F'(x) = \frac{1}{x^5}$

ถ้า $F(x) = -\frac{1}{4x^4}$

จะได้ $F'(x) = -\frac{1}{4} \frac{dx^{-4}}{dx} = -\frac{1}{4}(-4x^{-5}) = \frac{1}{x^5}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x^5}$ คือ $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสมบัติของเลขยกกำลังและเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาฟังก์ชัน $F(x)$ เมื่อกำหนด $F'(x) = 5x^4$

วิธีทำ ถ้า $F(x) = x^5$

จะได้ $F'(x) = 5x^4$ ซึ่งตรงกับสิ่งที่กำหนดให้

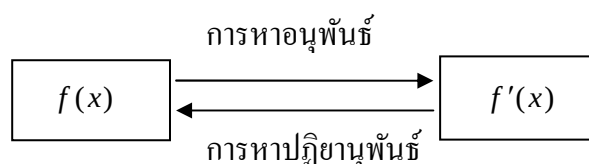
ดังนั้น เมื่อ $F'(x) = 5x^4$ จะได้ $F(x) = x^5 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสมบัติของเลขยกกำลังและเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร)

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปเรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

“ ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้วเรียกฟังก์ชัน F ว่าปฏิยานุพันธ์ของ f และมีรูปทั่วไปคือ ฟังก์ชัน $y = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ”



และสามารถสรุปเป็นขั้นตอนสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนด $f(x)$

ขั้นตอนที่ 2 ลองให้ $y = F(x)$

ขั้นตอนที่ 3 หา $F'(x)$

ขั้นตอนที่ 4 ทดสอบว่า $F'(x) = f(x)$ หรือไม่

1. ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $y = F(x) + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

2. ถ้า $F'(x) \neq f(x)$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่

2. ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้รับลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 10

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 9
2. ใบงานที่ 10
3. ห้องเรียนเสมือน
4. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
5. กวีนา นาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
6. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
7. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 . กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
9. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2 . กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 9 - การทำใบงานที่ 10 - การทำแบบทดสอบที่ 3 เรื่องปฏิกิริยาพันธและการประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 9 - ใบงานที่ 10 - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 9 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 70 ผ่าน - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้และใบงาน	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน

ใบงานที่ 10

ปฏิยานุพันธ์

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำสั่ง จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 4$

.....

2. $f(x) = 9x$

.....

3. $f(x) = x^6$

.....

4. $f(x) = x + 3$

.....

5. $f(x) = x(x + 4)$

.....

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

.....

.....

.....

7. $f(x) = x\sqrt{x}$

.....

.....

.....

8. $f(x) = \frac{1}{x^5}$

.....

.....

.....

9. $f(x) = \frac{1}{x^{-4}}$

.....

.....

.....

10. $f(x) = 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

เวลา 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

1. รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f คือฟังก์ชัน $y = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เขียนแทนสัญลักษณ์ $\int f(x) dx$ อ่านว่า “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ”

นั่นคือ ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้วจะได้ว่า

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

2. การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f สามารถหาได้รวดเร็ว โดยใช้สูตรดังต่อไปนี้

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์ และ k, c เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $\int k dx = kx + c$

2. ถ้า $n \neq -1$ แล้ว $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

4. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

5. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้
2. บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้
3. บอกสูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
4. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
5. นำความรู้เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถในการ

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจารณญาณ

สาระการเรียนรู้

1. ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
2. สูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน
3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการนำปริพันธ์ไม่จำกัดเขตไปใช้

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการทบทวนความรู้เรื่องปริพันธ์เพื่อเชื่อมโยงกับความรู้เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่กำลังจะศึกษา ดังนี้

“ถ้าให้ $f(x) = 3x^2$ และ $F(x) = x^3$ จะได้ $F'(x) = f(x) = 3x^2$ หรือ F เป็นปริพันธ์หนึ่งของ f

$$\begin{array}{ll} \text{นอกจากนี้ฟังก์ชัน} & F_1(x) = x^3 + 2 \\ & F_2(x) = x^3 + 2 \\ & F_3(x) = x^3 - 5 \\ & F_4(x) = x^3 + 0.4 \\ & \vdots \end{array}$$

ต่างก็เป็นปริพันธ์ของ f

จะเห็นว่า ปริพันธ์ของฟังก์ชัน f ต่างกันที่ค่าคงตัวเท่านั้น และจะเขียนรูปทั่วไปของปริพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วย $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “จากกระบวนการหาปริพันธ์ที่แสดงมาข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อมีฟังก์ชัน f เราจะพยายามหาฟังก์ชัน F ซึ่ง $F'(x) = f(x)$ แล้วสรุปว่ารูปทั่วไปของปริพันธ์ของ f คือฟังก์ชัน $y = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ซึ่งต่อไปเพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะเขียนแทนรูปทั่วไปของปริพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x) dx$ อ่านว่า “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x ”

ดังนั้น ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้วจะได้ว่า

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$
 กล่าวคือปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f ก็คือ ปริพันธ์ของ f นั่นเอง”

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้

1. ครูเริ่มต้นด้วยการแนะนำสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังนี้
 เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า เครื่องหมาย “ปริพันธ์”
 เรียก $f(x)$ ว่า ปริพัตต์
 ส่วน dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x
 และเรียกกระบวนการหา $\int f(x) dx$ ว่า “การหาปริพันธ์”
2. ครูนำเสนอสูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน พร้อมยกตัวอย่างประกอบดังนี้

สูตรที่ 1 $\int k \, dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 3 dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 1 จะได้ $\int 3 dx = 3x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 2 ถ้า $n \neq -1$ แล้ว $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x^4 dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 2 จะได้
$$\begin{aligned}\int x^4 dx &= \frac{x^{4+1}}{4+1} + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ &= \frac{x^5}{5} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \frac{1}{x^4} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

จะได้
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4} dx &= \int x^{-4} dx \\ &= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ &= \frac{x^{-3}}{-3} + c \\ &= \frac{-1}{3x^3} + c\end{aligned}$$

สูตรที่ 3 $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
และ $f(x)$ มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int 2x^3 dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 3 จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int 2x^3 dx &= 2 \int x^3 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^4}{4} + c_1 \right] \quad \text{เมื่อ } c_1 \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ &= \frac{x^4}{2} + c \quad \text{เมื่อ } c = 2c_1\end{aligned}$$

สูตรที่ 4 $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int (2x^2 + 3x + 1) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \int (2x^2 + 3x + 1) dx &= \int 2x^2 dx + \int 3x dx + \int 1 dx \\
 &= 2 \int x^2 dx + 3 \int x dx + \int 1 dx \\
 &= 2 \left[\frac{x^3}{3} + c_1 \right] + 3 \left[\frac{x^2}{2} + c_2 \right] + (x + c_3) \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{เมื่อ } c_1, c_2 \text{ และ } c_3 \text{ เป็นค่าคงตัว} \\
 &= \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + c \quad \text{เมื่อ } c = 2c_1 + 3c_2 + c_3
 \end{aligned}$$

สูตรที่ 5 $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์
--

หมายเหตุ โดยทั่ว ๆ ไป ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชัน แทนที่จะบวกค่าคงตัวเมื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของแต่ละฟังก์ชัน เพื่อความสะดวกจะบวกค่าคงตัวเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\int \left(4x^7 - \frac{1}{x^3} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \int \left(4x^7 - \frac{1}{x^3} \right) dx &= \int 4x^7 dx - \int \frac{1}{x^3} dx \\
 &= 4 \int x^7 dx - \int x^{-3} dx \\
 &= 4 \left[\frac{x^8}{8} \right] - \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right] + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว} \\
 &= \frac{x^8}{2} + \left[\frac{1}{2x^2} \right] + c
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากสูตรที่ 3 สูตรที่ 4 และสูตรที่ 5 จะได้

$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx$ เมื่อ $k_1, k_2, \dots, k_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int (6x^5 + 10x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int (6x^5 + 10x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) dx &= 6 \int x^5 dx + 10 \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + \int x^2 dx - \int 1 dx \\ &= 6 \left[\frac{x^6}{6} \right] + 10 \left[\frac{x^5}{5} \right] - 3 \left[\frac{x^4}{4} \right] + \left[\frac{x^3}{3} \right] - x + c \\ &= x^6 + 2x^5 - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

3. ครูอธิบายเพิ่มเติม ดังนี้ “ ถ้ากำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x)$ มาให้ การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f สามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \text{จาก} & \frac{dy}{dx} & = f(x) \\ \text{ดังนั้น} & \int \frac{dy}{dx} dx & = \int f(x) dx \\ & \int dy & = \int f(x) dx \\ \text{หรือ} & y & = \int f(x) dx \end{array}$$

4. จากนั้น ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 8 และ ตัวอย่างที่ 9 ซึ่งเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นความหมายของค่าคงตัว c ได้ชัดเจนขึ้น

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x + 3$ จงหา y

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x + 3$

จะได้
$$\begin{aligned}y &= \int (4x^3 - 6x + 3) dx \\ &= \int 4x^3 dx - \int 6x dx + \int 3 dx \\ &= 4 \int x^3 dx - 6 \int x dx + \int 3 dx \\ &= 4 \left[\frac{x^4}{4} \right] - 6 \left[\frac{x^2}{2} \right] + 3x + c \\ &= x^4 - 3x^2 + 3x + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(2, 1)$ และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น x^2

(อ้างอิงจากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สสวท.,

กระทรวงศึกษาธิการ : 2548)

วิธีทำ เนื่องจากความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\text{จะได้} \quad y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y = \frac{1}{3}x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แต่เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(2, 1)$ นั่นคือ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 1$

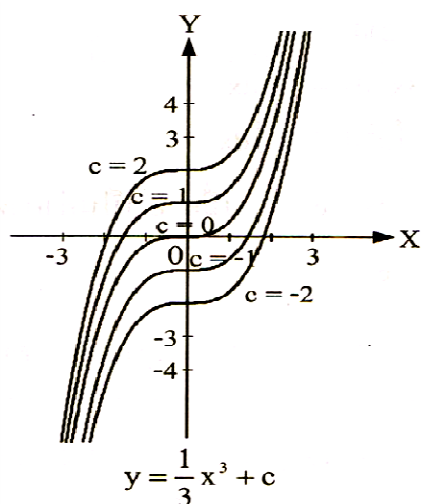
แทนค่า x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 2 และ 1 ตามลำดับ

$$\text{จะได้} \quad 1 = \frac{1}{3}(2^3) + c \quad \text{หรือ} \quad c = -\frac{5}{3}$$

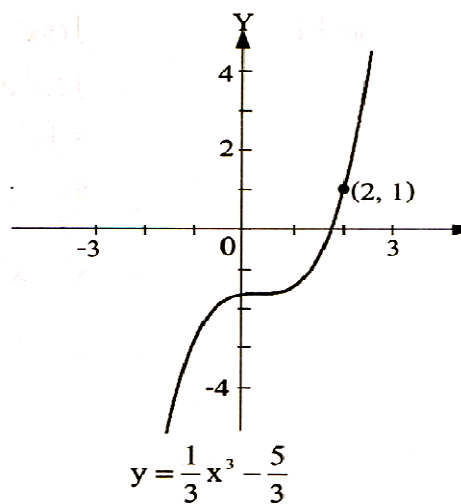
$$\text{ดังนั้น} \quad \text{สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ} \quad y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$$

หมายเหตุ $y = \frac{1}{3}x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว คือสมการที่แสดงชุดของเส้นโค้งทั้งหลาย ดังรูป ก

และมีเพียงเส้นโค้งเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด $(2, 1)$ ดังรูป ข



รูป ก



รูป ข

5. กรุณาเสนอตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นปัญหาที่ศึกษากันมากในวิชาฟิสิกส์ และเป็นปัญหาที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์จริง โดยสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวโดยใช้ความรู้เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขต นอกจากนี้ นักเรียนสามารถนำวิธีแก้โจทย์ปัญหาเหล่านี้ไปประยุกต์กับสถานการณ์ปัญหาอื่นที่คล้ายคลึงกันได้อีกด้วย

ตัวอย่างที่ 10 ในเวลา t วินาที รถไฟแล่นด้วยความเร่ง a ฟุตต่อ(วินาที)² โดยที่ $a = 12t^2 + 6t + 8$ เมื่อ $t = 0$ วินาที รถไฟแล่นได้ระยะทาง 10 ฟุต ด้วยความเร็วศูนย์ฟุตต่อวินาที จงหาระยะทาง s ของรถไฟ เมื่อ $t = 5$ วินาที

วิธีทำ เนื่องจาก $a = 12t^2 + 6t + 8$

นั่นคือ $a = \frac{dv}{dt} = 12t^2 + 6t + 8$

จะได้ว่า $v = \int (12t^2 + 6t + 8) dt$

$$= 12 \int t^2 dt + 6 \int t dt + \int 8 dt$$

$$= \frac{12t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + 8t + c_1$$

$$= 4t^3 + 3t^2 + 8t + c_1 \quad \text{เมื่อ } c_1 \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

เมื่อ $t = 0$ วินาที รถไฟแล่นด้วยความเร็วศูนย์ฟุตต่อวินาที นั่นคือ $v = 0$ เมื่อ $t = 0$

หาค่า c_1 โดยการแทนค่า $v = 0$ เมื่อ $t = 0$ ในสมการ $v = 4t^3 + 3t^2 + 8t + c_1$

จะได้ $c_1 = 0$ นั่นคือ $v = 4t^3 + 3t^2 + 8t$

จะได้ว่า $v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 3t^2 + 8t$

ดังนั้น $s = \int (4t^3 + 3t^2 + 8t) dt$

$$= 4 \int t^3 dt + 3 \int t^2 dt + 8 \int t dt$$

$$= \frac{4t^4}{4} + \frac{3t^3}{3} + \frac{8t^2}{2} + c_2$$

$$= t^4 + t^3 + 4t^2 + c_2 \quad \text{เมื่อ } c_2 \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

เมื่อ $t = 0$ วินาที รถไฟแล่นได้ระยะทาง 10 ฟุต นั่นคือ $s = 10$ เมื่อ $t = 0$

หาค่า c_2 โดยการแทนค่า $s = 10$ เมื่อ $t = 0$ ในสมการ $s = t^4 + t^3 + 4t^2 + c_2$

จะได้ $c_2 = 10$ นั่นคือ $s = t^4 + t^3 + 4t^2 + 10$

ดังนั้น ระยะทางที่รถไฟแล่นได้ เมื่อ $t = 5$ วินาทีเท่ากับ

$$s = 5^4 + 5^3 + 4(5^2) + 10$$

$$= 625 + 125 + 100 + 10$$

$$= 860$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที รถไฟแล่นได้ระยะทาง 860 ฟุต

ขั้นสรุป

1. ครูสรุปสูตรสำหรับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f ทั้ง 5 สูตร
2. ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้รับลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 11
3. ครูให้นักเรียนกลับไปทบทวนเรื่องการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม การเขียนกราฟของฟังก์ชัน โดยเฉพาะฟังก์ชันพาราโบลา และเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์เพื่อเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนในเรื่องปริพันธ์จำกัดเขตต่อไป

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 10
2. ใบงานที่ 11
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
8. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธีรับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
9. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
10. ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 10 - การทำใบงานที่ 11 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 3 เรื่องปฏิกิริยาพันธะและการประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 10 - ใบงานที่ 11 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 10 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน ผ่าน

ใบงานที่ 11

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int 2 dx$

.....

2. $\int 3x^2 dx$

.....

3. $\int \frac{1}{x^3} dx$

.....

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

.....

5. $\int \frac{x+2}{x^3} dx$

.....

6. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

.....

7. $\int x^2(x^2 - 4) dx$

.....

8. $\int (2x^3 - 3x^2 + 6 - 2x^{-2}) dx$

.....

2. ถ้าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $2x + 4$ และเส้นโค้ง $y = f(x)$ นี้ผ่านจุด $(1, 6)$ จงหาสมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $f'(x) = 4x$ และ $f(1) = 3$ จงหา $f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ในเวลา t วินาที รถไฟแล่นด้วยความเร่ง a ฟุตต่อ(วินาที)² โดยที่ $a = 12t^2 + 6t + 10$ ถ้า $t = 0$ วินาที รถไฟแล่นได้ระยะทาง 10 ฟุต ด้วยความเร็วศูนย์ต่อวินาที จงหาระยะทาง s ของรถไฟ เมื่อ $t = 5$ วินาที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบสรุปเนื้อหา เรื่องปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

1. $\int f(x) dx$ หมายถึง

.....

2. สูตรที่ใช้ในการหาอินทิกรัล (ปริพันธ์) ไม่จำกัดเขต มีดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่องปริพันธ์จำกัดเขต

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

เวลา 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$ ซึ่งในการคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งทำให้หาปริพันธ์จำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย โดยที่

$$\text{ถ้า } F'(x) = f(x) \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกสัญลักษณ์ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ได้
2. บอกทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้
3. หาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ

5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจารณ์ญาณ

สาระการเรียนรู้

1. ปริพันธ์จำกัดเขต
2. สัญลักษณ์ของปริพันธ์จำกัดเขต
3. ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครู้นำเข้าสู่บทเรียนโดยการทบทวนความรู้เรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันและสูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน ดังนี้

“ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้วจะได้ว่า ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f หรือปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ มีค่าเท่ากับ $F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน

สูตร 1 $\int k dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

สูตร 2 ถ้า $n \neq -1$ แล้ว $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตร 3 $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวและ $f(x)$ มีปริพันธ์

สูตร 4 $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์

สูตร 5 $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ มีปริพันธ์”

2. จากนั้น ครูทบทวนความรู้เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนี้

“ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

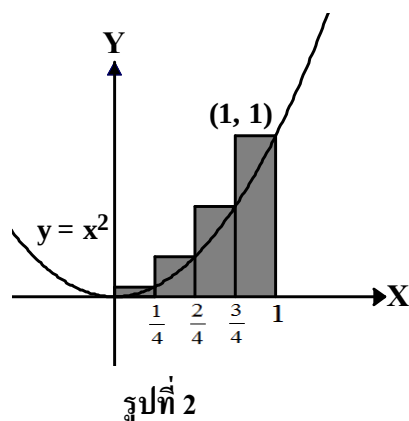
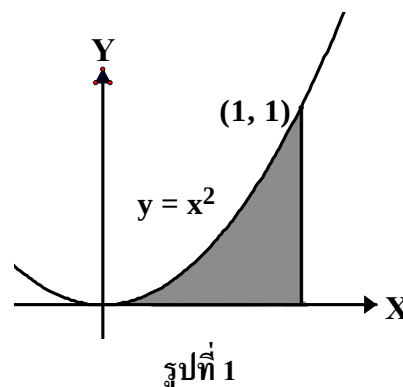
- f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน $[a, b]$ และ
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ”

ขั้นการจัดการเรียนรู้

1. ครูแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปฏิยานุพัทธ์กับพื้นที่ใต้กราฟ โดยใช้ตัวอย่างที่ 1 เป็นกรณีศึกษา โดยนักเรียนต้องมีความรู้เรื่องการเขียนกราฟพาราโบลา การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์มาพอสมควร

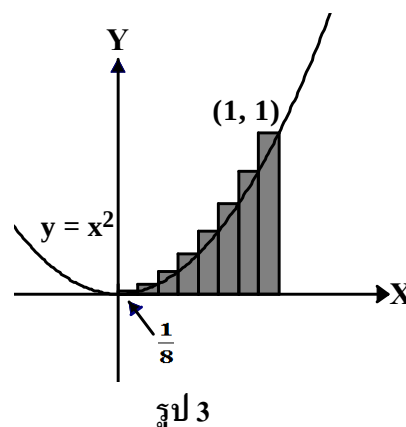
ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = x^2$ แกน X และเส้นตรง $x = 1$

วิธีทำ อาณาบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 1 คืออาณาบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ แต่เนื่องจากไม่มีสูตรโดยตรงที่ใช้ในการหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่แรเงา เราจึงต้องทำการประมาณค่าพื้นที่ดังกล่าวด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก ๆ หลายรูปที่ให้อณาบริเวณใกล้เคียงกับอาณาบริเวณที่กำหนด



ในรูปที่ 2 เราแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น 4 ช่วงย่อยที่กว้างเท่า ๆ กัน ต่อจากนั้นสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนแต่ละช่วงย่อย โดยมีช่วงย่อยเป็นฐานของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและเลือกค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดปลายขวามือของแต่ละช่วงย่อยแทนส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมที่ตั้งบนช่วงย่อยนั้น ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสี่รูปจะเป็นค่าประมาณของพื้นที่ที่เราต้องการโดยหยาบ ๆ

เพื่อให้ได้ค่าประมาณของพื้นที่ที่ต้องการใกล้เคียงความจริงยิ่งขึ้น เราจะแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ให้มีช่วงย่อยมากขึ้น เช่นในรูปที่ 3 แบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น 8 ช่วงย่อยที่กว้างเท่า ๆ กัน จะได้ค่าประมาณของพื้นที่ที่เราต้องการได้ใกล้เคียงความจริงมากขึ้น



โดยทั่วไป ถ้าเราแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่กว้างเท่า ๆ กัน และเลือกจุดปลายทางขวามือแทนความสูงเช่นเดียวกัน

ให้ S_n แทนผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้ง n รูป

Δx แทนความกว้างของแต่ละช่วงย่อย (ในที่นี้เท่ากับ $\frac{1}{n}$)

$$\text{ดังนั้น } S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$$

เนื่องจาก $y = f(x) = x^2$ จะได้ $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$, $f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2$, ..., $f\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$

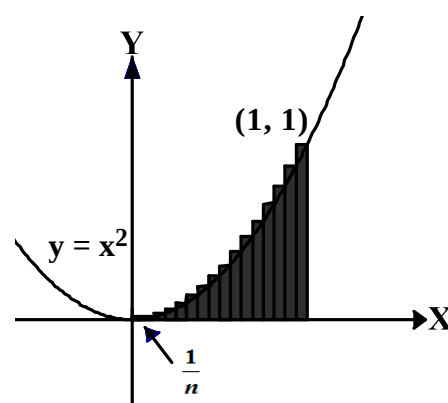
$$\text{เพราะฉะนั้น } S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\text{นั่นคือ } S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$



จะเห็นว่า ถ้าเราแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วง โดยที่ n มีค่ามาก ๆ แล้ว ค่าประมาณที่ได้จะใกล้เคียงกับพื้นที่ของอาณาบริเวณที่กำหนดมากขึ้น

ถ้าหาลิมิต $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

ฉะนั้น พื้นที่ของอาณาบริเวณที่กำหนดให้มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ตารางหน่วย

2. ครูสรุปขั้นตอนการหาพื้นที่ใต้กราฟ จากกระบวนการในตัวอย่างที่ 1 ดังนี้

“ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย n ช่วงที่มีความกว้างเท่า ๆ กันซึ่งเท่ากับ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{โดยมีจุดแบ่งอยู่ที่ } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ขั้นที่ 2 เลือกค่า x_i^* ในแต่ละช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และหาผลบวก

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

(หมายเหตุ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว เราสามารถเลือกค่า x_i^* เป็นค่าใดก็ได้ในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ ค่าปริพันธ์จำกัดเขตที่ได้จะมีค่าเท่ากันเสมอ)

ขั้นที่ 3 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ที่ได้จะเรียกว่า ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด

$[a, b]$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$

เรียก a ว่า **ลิมิตล่าง** (lower limit) ของปริพันธ์

เรียก b ว่า **ลิมิตบน** (upper limit) ของปริพันธ์

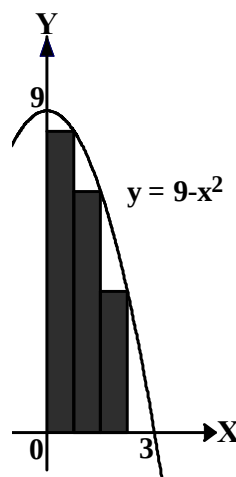
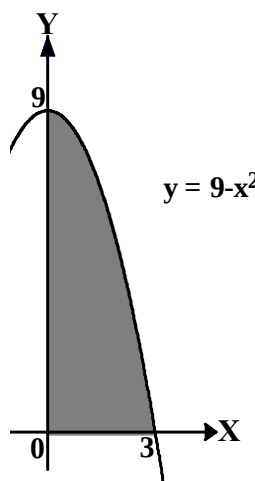
นั่นคือ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

3. ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 2

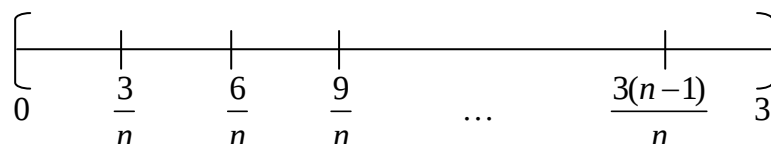
ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = 9 - x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และเส้นตรง $y = 0$

วิธีทำ อาณาบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คืออาณาบริเวณที่แรเงา ดังรูป



จะเห็นว่าช่วงของ x ซึ่งทำให้เกิดอาณาบริเวณที่แรงๆ คือช่วงปิด $[0, 3]$ สามารถดำเนินการตามกระบวนการในตัวอย่างที่ 1 ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[0, 3]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่า ๆ กัน ซึ่งแต่ละช่วงกว้างเท่ากับ $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ โดยมีจุดปลายของช่วงย่อยต่างๆ คือ $0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \dots, \frac{3(n-1)}{n}, \frac{3n}{n} = 3$



ขั้นที่ 2 เลือกจุดมาหนึ่งจุดในแต่ละช่วงย่อย ในที่นี้จะเลือกจุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อย

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } S_n &= \frac{3}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n} f\left(\frac{6}{n}\right) + \dots + \frac{3}{n} f\left(\frac{3n}{n}\right) \\
 &= \frac{3}{n} \left[9 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 \right] + \frac{3}{n} \left[9 - \left(\frac{6}{n}\right)^2 \right] + \dots + \frac{3}{n} \left[9 - \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \right] \quad \because f(x) = 9 - x^2 \\
 &= \frac{3}{n} \left\{ \left[9 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 \right] + \left[9 - \left(\frac{6}{n}\right)^2 \right] + \dots + \left[9 - \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \right] \right\} \\
 &= \frac{3}{n} \left[9n - \left(\frac{3}{n}\right)^2 - \left(\frac{6}{n}\right)^2 - \dots - \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \right] \\
 &= \frac{3}{n} \left[9n - \left(\frac{3(1)}{n}\right)^2 - \left(\frac{3(2)}{n}\right)^2 - \dots - \left(\frac{3n}{n}\right)^2 \right] \\
 &= \frac{3}{n} \left[9n - \left(\frac{3}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \right] \\
 &= \frac{3}{n} \left[9n - \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= 27 - \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} \\
 &= 27 - \frac{9}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) \\
 &= 27 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 หา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[27 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= 27 - \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 18\end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = 9 - x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และเส้นตรง $y = 0$ มีค่าเท่ากับ 18 ตารางหน่วย

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องพาราโบลา พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก อนุกรม และเรื่องลิมิตอนันต์)

4. ครูแนะนำเพิ่มเติมว่า “จากตัวอย่างที่ 2 พื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = 9 - x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และเส้นตรง $y = 0$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_0^3 (9 - x^2) dx$ ”

5. ครูให้ข้อสังเกตว่า “ถ้าสูตรของฟังก์ชัน f มีความซับซ้อนมากขึ้น การหาผลรวม S_n จะทำได้ลำบาก ดังนั้น การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ขั้นตอนที่กล่าวมาข้างต้นจึงไม่สะดวกนัก แต่เราสามารถใช้ความรู้เรื่องปฏิยานุพันธ์ในการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตได้ ซึ่งจะช่วยให้การคำนวณหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่กำหนดสามารถทำได้รวดเร็วยิ่งขึ้น โดยอาศัยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ”

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

6. ครูแนะนำสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x) dx$ ว่าเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง $[a, b]$ และสรุปวิธีการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x) dx$ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ดังนี้

- (1) หาปฏิยานุพันธ์ F ของฟังก์ชัน f นั่นคือหา $\int f(x) dx$
- (2) หา $F(b) - F(a)$ หรือแทนด้วยสัญลักษณ์ $F(x)|_a^b$
- (3) จะได้ว่า $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสจะได้ว่า

$$\text{ถ้า } F'(x) = f(x) \text{ แล้ว } \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

7. กรุณาสอนตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$

และปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \int_0^1 x^2 dx &= \left(\frac{x^3}{3} + c \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + c \right) - (0 + c) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและเรื่องความต่อเนื่องบนช่วง)

8. กรุณาให้ข้อสังเกตแก่นักเรียนดังนี้ “นักเรียนจะเห็นว่าคำตอบที่ได้ตรงกับคำตอบในตัวอย่างที่ 1 แต่วิธีการในตัวอย่างที่ 3 นั้นง่ายและสะดวกกว่ามาก และสังเกตได้ว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสนั้นไม่จำเป็นต้องบวกค่าคงตัว c เพราะเมื่อแทนค่า x ใน $F(x)$ ด้วย a และ b แล้วคำนวณหา $F(b) - F(a)$ ค่า c จะลบกันหมดไป”

9. กรุณาให้นักเรียนลองนำโจทย์ในตัวอย่างที่ 2 มาหาคำตอบโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสแล้วเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งจะพบว่าคำตอบที่ได้เท่ากัน ดังตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int_0^3 (9 - x^2) dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 9 - x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 3]$

และ $\int (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 9 - x^2$ คือ $F(x) = 9x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \int_0^3 (9 - x^2) dx &= \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\ &= \left(9(3) - \frac{3^3}{3} \right) - 0 \\ &= 27 - 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและเรื่องความต่อเนื่องบนช่วง)

10. ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int_2^4 \left(x^2 + \frac{3}{x^3} \right) dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[2, 4]$

และ $\int (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 9 - x^2$ คือ $F(x) = 9x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \int_2^4 \left(x^2 + \frac{3}{x^3} \right) dx &= \int_2^4 (x^2 + 3x^{-3}) dx \\
 \int_2^4 \left(x^2 + \frac{3}{x^3} \right) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^{-2}}{-2} \right) \Big|_2^4 \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2x^2} \right) \Big|_2^4 \\
 &= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{3}{2(4)^2} \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3}{2(2)^2} \right) \\
 &= \left(\frac{64}{3} - \frac{3}{32} \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{8} \right) \\
 &= \left(\frac{2048 - 9}{96} \right) - \left(\frac{64 - 9}{24} \right) \\
 &= \frac{2039}{96} - \frac{55}{24} \\
 &= \frac{2039 - 220}{96} \\
 &= \frac{1819}{96} = 18 \frac{91}{96}
 \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องสูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและเรื่องความต่อเนื่องบนช่วง)

11. ครุณาเสนอตัวอย่างเพิ่มเติม ซึ่งเป็นโจทย์ประยุกต์เรื่องปริพันธ์จำกัดเขต และเป็นโจทย์ปัญหาที่เชื่อมโยงกันสถานการณ์จริง

ตัวอย่างที่ 6 ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียเมื่อเทียบกับเวลาใด ๆ เท่ากับ $20t^2(t+3)$ เมื่อ t คือจำนวนชั่วโมงนับจากเวลาเริ่มต้น จงหาจำนวนแบคทีเรียที่เปลี่ยนแปลงไปในระยะเวลา 1 ถึง 3 ชั่วโมง

วิธีทำ สมมติให้ $f(t)$ คือจำนวนแบคทีเรีย

t คือจำนวนชั่วโมงนับจากเวลาเริ่มต้น

วิเคราะห์: โจทย์ต้องการหา $f(3) - f(1)$ โดยกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียเมื่อเทียบกับเวลาใด ๆ เท่ากับ $20t^2(t+3)$ นั้นหมายถึงกำหนด $f'(t)$ ดังนั้น เราสามารถหาคำตอบได้โดยการหาปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{จาก } f'(t) &= 20t^2(t+3) = 20t^3 + 60t^2 \\ \text{จะได้ } f(3) - f(1) &= \int_1^3 (20t^3 + 60t^2) dt \\ &= \left. \frac{20t^4}{4} + \frac{60t^3}{3} \right|_1^3 \\ &= \left. 5t^4 + 20t^3 \right|_1^3 \\ &= 5(3)^4 + 20(3)^3 - (5(1)^4 + 20(1)^3) \\ &= 405 + 540 - (5 + 20) \\ &= 920 \text{ ตัว}\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนแบคทีเรียเพิ่มขึ้น 920 ตัว ในช่วงระยะเวลา 1 ถึง 3 ชั่วโมง

ขั้นสรุป

ครูกล่าวว่า “เราสามารถนำความรู้เรื่องปริพันธ์จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้กับการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้ ซึ่งเราจะได้เรียนในคาบหน้า จากนั้นครูสรุปวิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน ทำได้ดังนี้

1. หา $F(x)$ โดยการนำ $f(x)$ ไปหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต แต่ไม่ต้องบวกค่าคงตัว
 $\int f(x) dx = F(x)$ หรือ $F'(x) = f(x)$
2. เมื่อได้ $F(x)$ จากข้อ 1 แล้วให้นำค่า a และ b ไปแทนในฟังก์ชัน $F(x)$ และคำนวณค่า
 $F(b) - F(a)$

ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้รับลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 12

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 11
2. ใบงานที่ 12
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
8. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
9. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
10. ศุภกิจ เจริญวิสุตมกุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และ ทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 11 - การทำใบงานที่ 12 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 3 เรื่องปฏิกิริยาพันธะและการ ประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 11 - ใบงานที่ 12 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 11 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนนร้อยละ 60 ผ่าน

ด้านคุณลักษณะอัน พึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน <u>ผ่าน</u>
--------------------------------	---	--	---

ใบงานที่ 12

ปริพันธ์จำกัดเขต

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

1. $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3) dx$

.....

2. $\int_{-1}^1 (-x^4 + x^2 - 1) dx$

.....

3. $\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) dx$

.....

4. $\int_0^1 x(x+1)^2 dx$

.....

5. $\int_0^4 \sqrt{x}(x+2) dx$

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

เรื่องพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2
เวลา 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ หมายถึง พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K) : นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
2. บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
3. หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P) : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
5. การคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ (A) : ส่งเสริมและปลูกฝังให้นักเรียน

1. ตระหนักถึงคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ทำงานอย่างเป็นระบบ
3. มีระเบียบวินัย
4. มีความรอบคอบ
5. มีความรับผิดชอบ
6. มีวิจรณ์ญาณ

สาระการเรียนรู้

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการทบทวนการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนี้
ให้นักเรียนหาปริพันธ์จำกัดเขตของ

$$1) \quad f(x) = 3, \quad x \in [0, 1]$$

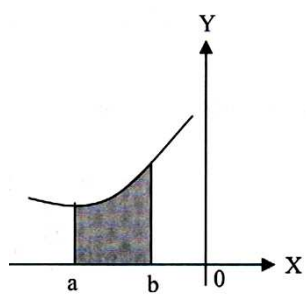
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 3 dx \\ &= 3x \Big|_0^1 \\ &= 3(1) - 3(0) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$2) \quad g(x) = 4x^2, \quad x \in [-1, 2]$$

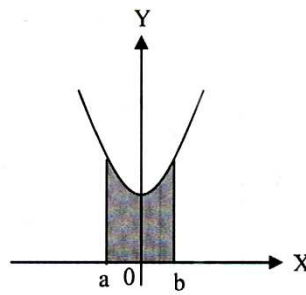
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_{-1}^2 g(x) dx &= \int_{-1}^2 4x^2 dx \\ &= \frac{4x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{4(2)^3}{3} - \frac{4(-1)^3}{3} \\ &= \frac{32}{3} + \frac{4}{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

ขั้นการจัดการเรียนรู้

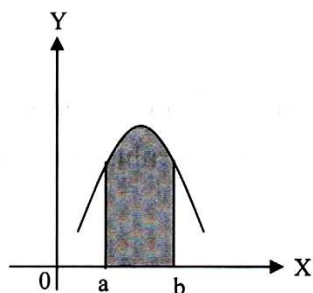
1. ครูแสดงตัวอย่างบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้



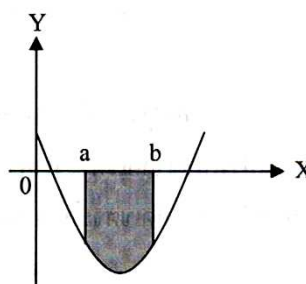
ก



ข



ค



ง

2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปสิ่งที่สังเกตได้จากกราฟข้างต้น ซึ่งนักเรียนควรสรุปได้ดังนี้

- พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$ เช่น รูป ก ข และ ค เป็นตัวอย่างของบริเวณที่อยู่เหนือแกน X และค่าของ $f(x) > 0$
- พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$ เช่น รูป ง เป็นตัวอย่างของบริเวณที่อยู่ใต้แกน X และค่าของ $f(x) < 0$

3. จากนั้น ครูเสนอแนะวิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ โดยอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f จาก $x=a$ ถึง $x=b$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน X แล้ว

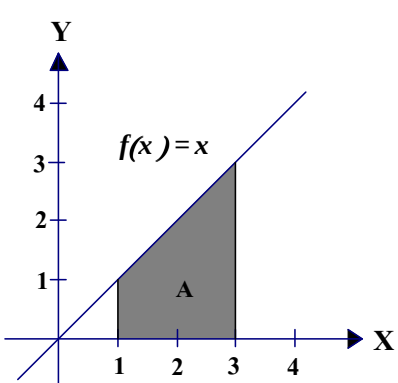
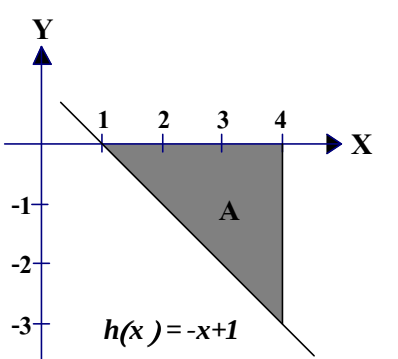
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว

$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

4. ครูให้นักเรียนพิจารณาการหาพื้นที่ใต้กราฟเปรียบเทียบ 2 วิธี คือวิธีใช้สูตรการหาพื้นที่ที่นักเรียนเคยเรียนมา และวิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขต เพื่อตรวจสอบค่าของพื้นที่ที่ได้ ดังตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนหาพื้นที่ที่ที่แรเงา (บริเวณ A) ของกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้

กราฟ	วิธีใช้สูตรการหาพื้นที่	วิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขต
	พื้นที่ $A = \frac{1}{2}$ (ผลบวกของด้านคู่ขนาน) $\times$ ความสูง $= \frac{1}{2}(1+3) \times 2$ $= 4$	พื้นที่ $A = \int_1^3 f(x) dx$ $= \int_1^3 x dx$ $= \frac{x^2}{2} \Big _1^3$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$ $= \frac{8}{2}$ $= 4 \text{ ตารางหน่วย}$
	พื้นที่ $A = \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน} \times \text{ความสูง}$ $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3$ $= \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$	พื้นที่ $A = -\int_1^4 g(x) dx$ $= -\int_1^4 (-x+1) dx$ $= -\left[\left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^4 \right]$ $= -\left[\left(-\frac{16}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \right]$ $= -\left(-4 - \frac{1}{2} \right)$ $= \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$

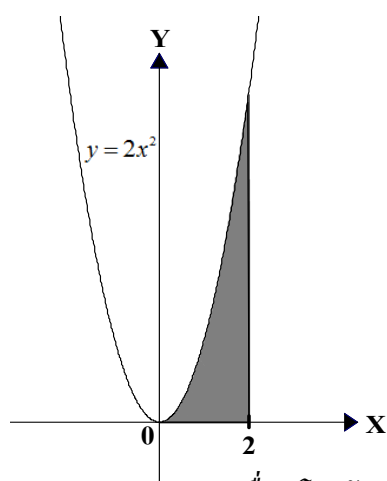
(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมคางหมู)

5. ครูอภิปรายสิ่งที่ได้จากตัวอย่างที่ 1 ดังนี้

“จากตัวอย่างที่ 1 จะเห็นว่า การหาพื้นที่ใต้กราฟทั้ง 2 วิธี ให้ผลลัพธ์เท่ากัน แต่หากเป็นกราฟที่มีความซับซ้อน หรือมีลักษณะเป็นกราฟเส้นโค้ง จะใช้วิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขตจะสะดวก และหาคำตอบได้ง่ายกว่า”

6. ครุณาเสนอตัวอย่างที่ 2 ซึ่งเป็นการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งที่อยู่ในรูปของกราฟพาราโบลา

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = 3x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$



วิธีทำ พื้นที่ที่ต้องการ สามารถแสดงได้ดังนี้

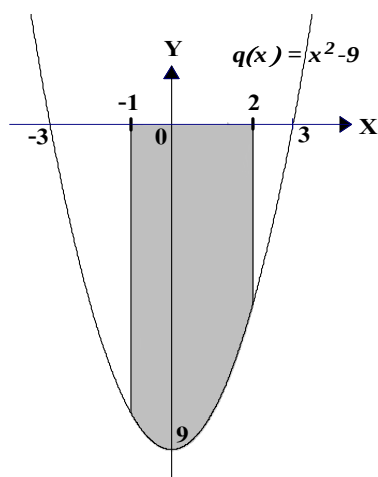
ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = 3x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$
 เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[0, 2]$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A &= \int_0^2 3x^2 dx \\ &= x^3 \Big|_0^2 \\ &= 8 - 0 \\ &= 8 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการเขียนกราฟของฟังก์ชันและทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $f(x) = x^2 - 9$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ กราฟของ f เป็นรูปพาราโบลาหงาย และ $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[-1, 2]$ ดังรูป

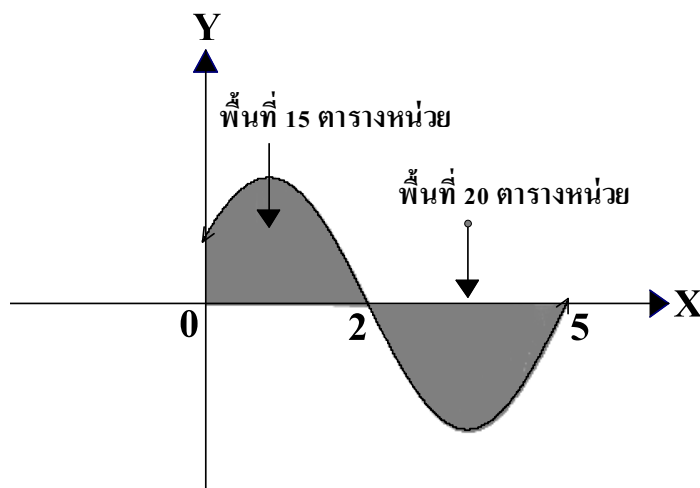


ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $f(x) = x^2 - 9$
 จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A &= -\int_{-1}^2 (x^2 - 9) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= -\left[\left(\frac{8}{3} - 18 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 9 \right) \right] \\ &= 24 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องการเขียนกราฟของฟังก์ชันและทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,5]$ และ F เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[0,5]$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ ฟังก์ชัน f มีกราฟแสดงดังรูป 2.12 จ และสมมติว่า พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[0,2]$ เท่ากับ 14 ตารางหน่วย และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[2,5]$ เท่ากับ 20 ตารางหน่วย ถ้า $F(0)=10$ จงหาค่าของ $F(2)$ และ $F(5)$



วิธีทำ จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า

$$F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x) dx$$

เนื่องจากพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[0,2]$ เท่ากับ 15 ตารางหน่วย

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_0^2 f(x) dx = 15$$

และเนื่องจาก $F(0)=10$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad F(2) - 10 &= \int_0^2 f(x) dx \\ F(2) &= \int_0^2 f(x) dx + 10 \\ &= 15 + 10 = 25 \end{aligned}$$

ต่อไปหาค่าของ $F(5)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้ว่า

$$F(5) - F(2) = \int_2^5 f(x) dx$$

เนื่องจากพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[2,5]$ เท่ากับ 20 ตารางหน่วย

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_2^5 f(x) dx = -20$$

และเนื่องจาก $F(2)=25$

ดังนั้น

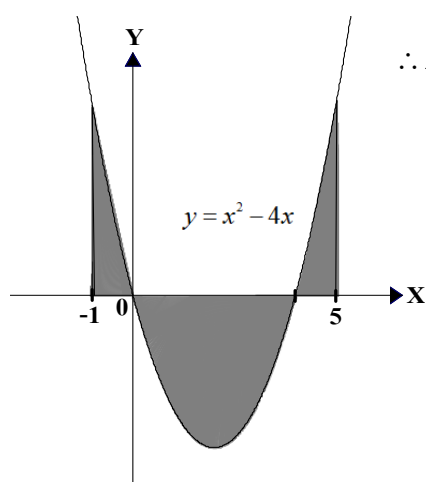
$$\begin{aligned} F(5) &= \int_2^5 f(x) dx + F(2) \\ &= -20 + 25 = 5 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $F(2) = 25$ และ $F(5) = 5$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x) = x^2 - 4x$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 5$

วิธีทำ เขียนกราฟ $y = x^2 - 4x$ ได้ดังรูป

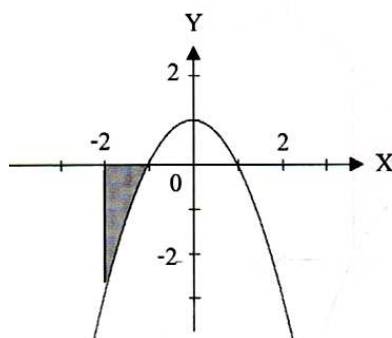


พื้นที่ที่ต้องการหา คือ พื้นที่ที่แรเงา

$$\begin{aligned} \therefore A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 4x) dx + \left(-\int_0^4 (x^2 - 4x) dx \right) + \int_4^5 (x^2 - 4x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right) \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right) \Big|_4^5 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{4^3}{3} - 2(4)^2 \right) + \left(\left[\frac{5^3}{3} - 2(5)^2 \right] - \left[\frac{4^3}{3} - 2(4)^2 \right] \right) \\ &= \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3} \\ &= 15\frac{1}{3} \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องกราฟของฟังก์ชันและทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ตัวอย่างที่ 6 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = -x^2 + 1, x \in [-2, -1]$



$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \int_{-2}^{-1} f(x) dx &= -[F(-1) - F(-2)] \\ &= -\left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^{-1} \\ &= \frac{4}{3} \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

(เชื่อมโยงกับความรู้เรื่องกราฟของฟังก์ชันและทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ขั้นสรุป

ครูสรุปวิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง และให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้รับลงในแบบสรุปเนื้อหา และทำใบงานที่ 13

สื่อ / นวัตกรรม / แหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 12
2. ใบงานที่ 13
3. แบบสรุปเนื้อหา
4. ห้องเรียนเสมือน
5. กนกวลี อุณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์, 2548.
6. กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์,
2548.
7. จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
เพิ่มทรัพย์การพิมพ์, 2550.
8. ธนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือสอบคณิตศาสตร์เข้ามหาวิทยาลัยระบบแอดมิชชัน (A-NET) และวิธี
รับโดยตรง : คณิตศาสตร์ขั้นสูง (A-NET). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ science center, 2547.
9. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือ
เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
10. ศุภกิจ เจริญวิสุตมกุล. คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แม็ค, 2550.

การวัดและประเมินผล

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านความรู้และ ทักษะ	- การบันทึกลงใบความรู้ที่ 12 - การทำใบงานที่ 13 - การทำแบบสรุปเนื้อหา - การทำแบบทดสอบที่ 3 เรื่องปฏิกิริยาพันธะและการ ประยุกต์	- ใบความรู้ที่ 12 - ใบงานที่ 13 - แบบสรุปเนื้อหา - แบบทดสอบ	- บันทึกลงใบความรู้ที่ 12 ได้ถูกต้องร้อยละ 80 - ทำใบงานได้ถูกต้องอย่างน้อย ร้อยละ 70 ผ่าน - สรุปได้ถูกต้องครบถ้วน - ทำแบบทดสอบได้คะแนน ร้อยละ 60 ผ่าน

สิ่งที่ต้องการประเมิน	วิธีประเมิน	เครื่องมือที่ประเมิน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านคุณลักษณะอัน พึงประสงค์	- การเข้าชั้นเรียน - การจดบันทึก	- สมุดเช็ครายชื่อ - ใบความรู้ ใบงาน และแบบสรุปเนื้อหา	- บันทึกลงในใบความรู้ทุกข้อและเข้าเรียนตลอดคาบเรียน <u>ผ่าน</u>

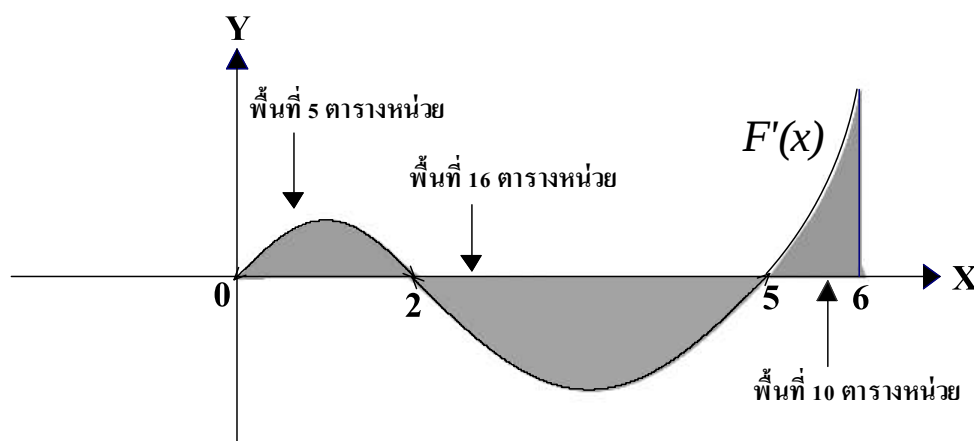
ใบงานที่ 13

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 0$
2. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2 - 25$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$
3. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = -x^2 + 1$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$
4. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = \sqrt{x}$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$
5. กำหนดให้ ฟังก์ชัน $F'(x)$ แสดงดังรูป



ถ้า $F(0) = 3$ จงหาค่าของ $F(2)$, $F(5)$ และ $F(6)$

แบบสรุปเนื้อหา เรื่องพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ชื่อ.....
 ชั้น.....เลขที่.....โรงเรียน.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามหัวข้อต่อไปนี้

- พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ หมายถึง

- พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ จะหาพื้นที่ได้จาก

A =

- พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ จะหาพื้นที่ได้จาก

A =

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแคลคูลัส

ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

พร้อมเฉลย

แบบทดสอบเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น

คำชี้แจง : แบบทดสอบมีทั้งหมด 15 ข้อ คะแนนรวม 30 คะแนน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. พิจารณาข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

๑. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ มีลิมิตที่ $x=1$

๒. ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \leq 1 \\ 3 & ; x > 1 \end{cases}$

ไม่มีลิมิตที่ $x=1$

ข้อใดถูกต้อง

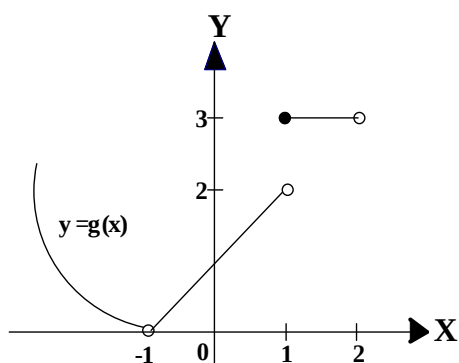
ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑

ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒

ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒

ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ให้ดังนี้



ข้อใดถูกต้อง

ก. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1$

ข. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2$

ค. $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$

ง. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

3. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 1 \\ x-1 & ; 0 < x \leq 1 \\ 3 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

ข. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

ค. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

ง. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

4. ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ ถูกต้อง

ก. $\lim_{x \rightarrow -3^-} |x-3| = 0$

ข. $\lim_{x \rightarrow 3^-} |x-3| = 0$

ค. $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0$

ง. $\lim_{x \rightarrow 3^+} |x-3| = 0$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 4x + 1} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. -1

ข. 0

ค. $\frac{1}{3}$

ง. 1

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

๑. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$

๒. $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x)(2x - 5) = 132$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑

ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒

ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒

ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{3x-2}{x^2-25} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. -13 ข. 0

ค. 13 ง. หาค่าไม่ได้

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. -1 ข. 0

ค. $\frac{1}{2}$ ง. $\frac{2}{3}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x^2}{x^2} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. -3 ข. 0

ค. 3 ง. หาค่าไม่ได้

10. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. 0 ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{2}$ ง. 3

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{25-x^2}-4}{x-3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

ก. $-\frac{3}{4}$ ข. $\frac{2}{3}$

ค. $\frac{3}{4}$ ง. หาค่าไม่ได้

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

๑. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$

๒. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-2x-3} = \frac{27}{4}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑

ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒

ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒

ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

13. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; x \leq 4 \\ 7 + \frac{16}{x} & ; x > 4 \end{cases}$$

ข้อใด ไม่ ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = -4$

ข. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 4$

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

ง. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = -1$

14. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ k & ; x = 1 \end{cases}$$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริง ค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน ต่อเนื่องที่ $x=1$ คือข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1 ข. 2
ค. 3 ง. 4

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

๑. ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{36-x^2}$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด

$$[-6, 6]$$

๒. ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด

$$[-4, 4]$$

ข้อใดถูกต้อง

- ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑
ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒
ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒
ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

ขอให้ทุกคนโชคดี
ในการสอบครับ



เฉลยแบบทดสอบเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

- | | |
|-------|-------|
| 1. ค | 11. ข |
| 2. ข | 12. ก |
| 3. ค | 13. ข |
| 4. ก | 14. ข |
| 5. ก | 15. ก |
| 6. ข | |
| 7. ง | |
| 8. ง | |
| 9. ก | |
| 10. ง | |

แบบทดสอบเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น

คำชี้แจง : แบบทดสอบมีทั้งหมด 15 ข้อ คะแนนรวม 30 คะแนน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของเส้นสัมผัส
เส้นโค้ง $y = f(x) = x^2 + 2x + 5$ ที่จุด

(1, 8)

ก. $y = x + 7$

ข. $y = 2x + 6$

ค. $y = 4(x + 1)$

ง. $y = 3x + 5$

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
 $f(x) = 2x^2 + 5$ ที่จุด $x = 2$

ก. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(2+h)^2 + 5] - 13}{h}$

ข. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4 + h^2 + 5] - 13}{h}$

ค. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(2+h)^2 + 13] - 5}{h}$

ง. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2 + 5 - 13}{h}$

3. กำหนด $y = x^2 + 1$ อัตราการ
เปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x
ในช่วง $x = 3$ ถึง $x = 5$ เท่ากับเท่าใด

ก. 7

ข. 8

ค. 9

ง. 10

4. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของ
รูปวงกลมเมื่อเทียบกับความยาวของรัศมีของ
วงกลมนั้น เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก
8 เซนติเมตรเป็น 10 เซนติเมตรเท่ากับเท่าใด

ก. 14π

ข. 16π

ค. 18π

ง. 20π

5. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x - x^2)$ ตรงกับข้อ
ใด

ก. $f'(x) = -8x^3 + 15x^2 + 4x + 1$

ข. $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 8x + 1$

ค. $f'(x) = 8x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

ง. $f'(x) = -8x^3 + 15x^2 - 8x + 1$

6. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \frac{x+1}{x-3}$ ที่จุด

$x = 4$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{dy}{dx} = -4$

ข. $\frac{dy}{dx} = 4$

ค. $\frac{dy}{dx} = 1$

ง. $\frac{dy}{dx} = -1$

7. โยนลูกหินขึ้นไปในแนวดิ่ง โดยลูกหิน
นั้นมีการเคลื่อนที่ตามสมการ

$s = 3 + 2t - t^2$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร
และ t มีหน่วยเป็นวินาที วัตถุที่โยนขึ้นไปนี้
จะเริ่มตกลงมาหลังจากเวลาผ่านไปกี่วินาที

ก. 0.5 ข. 1

ค. 1.5 ง. 2

8. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (x^2 + 5)^4$ ตรง
กับข้อใด

ก. $\frac{dy}{dx} = 8(x^2 + 5)^3$

ข. $\frac{dy}{dx} = 8x(x^2 + 5)^3$

ค. $\frac{dy}{dx} = 4(x^2 + 5)^3$

ง. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 5)^3$

9. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x} - 5x^6 + 9$
ค่าของ $f'''(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} - 600x^3$

ข. $\frac{10}{27}x^{\frac{8}{3}} + 600x^3$

ค. $\frac{10}{27}x^{-\frac{5}{3}} - 600x^3$

ง. $\frac{10}{27}x^{\frac{5}{3}} + 600x^3$

10. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7$
อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันขณะที่
 $x = 3$ ตรงกับข้อใด

ก. 12

ข. -12

ค. 14

ง. -14

11. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง

$s = 2t^2 - 5t - 2$ ในเวลา t วินาที ข้อใด

ไม่ ถูกต้อง

ก. ความเร็วขณะ $t = 4$ เท่ากับ 11 เมตร/
วินาที

ข. ความเร่งขณะ $t = 4$ เท่ากับ 4 เมตร/
ต่อวินาที²

ค. ความเร็วขณะ $t = 3$ เท่ากับ 7 เมตร/
วินาที

ง. ความเร่งขณะ $t = 3$ เท่ากับ 3 เมตร/
ต่อวินาที²

12. กำหนดฟังก์ชัน

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7$ พิจารณา

ข้อความต่อไปนี้

๑. f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -1)$
และบนช่วง $(2, \infty)$

๒. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1, 2)$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑

ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒

ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒

ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

13. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -15 เมื่อ

$$x = 2$$

ข. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -15 เมื่อ

$$x = -1$$

ค. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 12 เมื่อ

$$x = 2$$

ง. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 12 เมื่อ

$$x = -1$$

14. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1 \text{ เป็นฟังก์ชันบน}$$

ช่วงปิด $[-4, 2]$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 11

$$\text{ที่ } x = -2$$

ข. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 11

$$\text{ที่ } x = -4$$

ค. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เท่ากับ -17

$$\text{ที่ } x = -2$$

ง. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ -17

$$\text{ที่ } x = -4$$

15. ต้องการใช้ลวดหนามยาว 400 เมตร เพื่อล้อมที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งด้านหนึ่งอยู่ติดริมฝั่งแม่น้ำและไม่ต้องล้อมรั้ว ข้อใดถูกต้อง

ก. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุดเป็น 15,000 ตารางเมตร

ข. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีด้านกว้างเป็น 150 เมตร

ค. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีด้านยาวเป็น 200 เมตร

ง. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีด้านกว้างเป็น 200 เมตร

ขอให้ทุกคนโชคดี
ในการสอบครับ



เฉลยแบบทดสอบเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

- | | |
|-------|-------|
| 1. ค | 11. ง |
| 2. ก | 12. ง |
| 3. ข | 13. ง |
| 4. ค | 14. ก |
| 5. ง | 15. ค |
| 6. ก | |
| 7. ข | |
| 8. ข | |
| 9. ก | |
| 10. ค | |

แบบทดสอบเรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น

คำชี้แจง : แบบทดสอบมีทั้งหมด 15 ข้อ คะแนนรวม 30 คะแนน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

๑. x^3 เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $3x^2$ เพราะ

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

๒. $3x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^3 เพราะ

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

ข. ถูกเฉพาะข้อ ๑

ค. ถูกเฉพาะข้อ ๒

ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

2. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^4}$$

ก. $-\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} + c$

ข. $-\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4} + c$

ค. $-3x + 2x^3 + c$

ง. $\frac{3}{x} - \frac{6}{x^3} + c$

3. $\int (3x^2 + 2x - 5) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x^3 + x^2 - 5x + c$

ข. $6x + 2 + c$

ค. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + c$

ง. $3x^3 + 2x^2 - 5x + c$

4. $\int -4x^{\frac{2}{3}} dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $-12x^{\frac{5}{3}} + c$

ข. $\frac{12}{5}x^{\frac{2}{3}} + c$

ค. $-4x^{\frac{5}{3}} + c$

ง. $-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

5. $\int \left(\frac{x+2}{x^3} \right) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{3(x+2)^2}{2x^3} + c$

ข. $\frac{(x+2)^2}{2x^3} + c$

ค. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c$

ง. $-x - x^2 + c$

6. y มีค่าเท่ากับข้อใด เมื่อกำหนด

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

ก. $x^4 + x^3 - x^2 + c$

ข. $12x^2 + 6x - 2 + c$

ก. $x^4 + x^3 - x^2 - 3x + c$

ง. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c$

7. ถ้ากำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $3x^2 - 4x - 5$ แล้ว สมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1, -6)$ ตรงกับข้อใด

ก. $x^3 - x^2 - 5x - 6$

ข. $x^3 - 2x^2 - 5x$

ค. $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

ง. $x^3 - 2x^2 - 5x + 1$

8. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงจากจุดตั้งต้นจุดหนึ่งด้วยความเร่ง $6t^2$ ฟุต/วินาที² เมื่อ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นฟุต จงหาว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่าไรเมื่อ $t = 4$

ก. 8 ฟุต

ข. 16 ฟุต

ค. 128 ฟุต

ง. 256 ฟุต

9. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{2^3}{3}$

ข. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}$

ค. $\int_2^3 2x^3 dx = \frac{2^4}{2} - \frac{3^4}{2}$

ง. $\int_{-1}^2 2x dx = (-1)^2 - 2^2$

10. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{2}{3}$ ข. $\frac{4}{3}$

ค. $\frac{7}{3}$ ง. $\frac{8}{3}$

11. $\int_1^3 (3x^2 + x - 2) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 15 ข. 26

ค. 34 ง. 40

12. $\int_0^4 \sqrt{x}(x-2) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $2\frac{2}{15}$

ข. $3\frac{2}{15}$

ค. 16

ง. 64

13. พื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย

กราฟ $y = 25 - x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และ

เส้นตรง $y = 0$

คือข้อใด

ก. $\int_0^5 (25 - x^2) dx$

ข. $\int_0^{10} (25 - x^2) dx$

ค. $\int_0^{15} (25 - x^2) dx$

ง. $\int_0^{25} (25 - x^2) dx$

14. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4$

จาก $x = -2$ ถึง $x = 2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

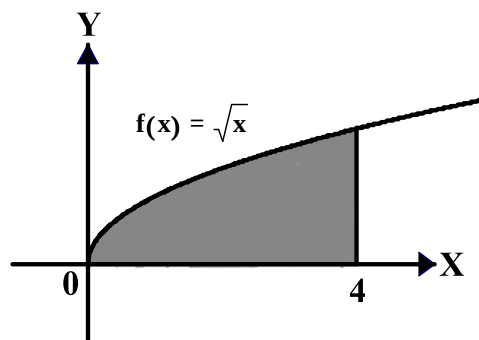
ก. $\frac{32}{9}$

ข. $\frac{23}{3}$

ค. $10\frac{1}{3}$

ง. $10\frac{2}{3}$

15. จากรูป พื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับข้อใด



ก. $5\frac{1}{3}$

ข. $\frac{15}{3}$

ค. $5\frac{2}{3}$

ง. $\frac{16}{3}$

ขอให้ทุกคนโชคดี

ในการสอบครับ



เฉลยแบบทดสอบเรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์

- | | |
|-------|-------|
| 1. ข | 11. ข |
| 2. ก | 12. ค |
| 3. ก | 13. ก |
| 4. ง | 14. ค |
| 5. ค | 15. ก |
| 6. ค | |
| 7. ข | |
| 8. ค | |
| 9. ข | |
| 10. ง | |

แบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียน

เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

**แบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง
ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)**

คำชี้แจง แบบสอบถามนี้เป็นการสำรวจพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการหาแนวทางการพัฒนาการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ ข้อมูลดังกล่าวไม่มีผลต่อผู้ตอบแบบสอบถามในทุกกรณี

ตอนที่ 1 ข้อมูลเบื้องต้นของผู้ตอบแบบสอบถาม

คำชี้แจง โปรดเลือกข้อความต่อไปนี้ตามความเป็นจริง

1. เพศ

☐ ชาย

☐ หญิง

2. โรงเรียนที่กำลังศึกษา

☐ โรงเรียนบาเจาะ

☐ โรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชาคาร”

☐ โรงเรียนกาบังพิทยาคม

3. ระดับชั้นการศึกษา

☐ ม. 4

☐ ม. 5

☐ ม. 6

4.เกรดเฉลี่ยรวมนปัจจุบัน

☐ น้อยกว่า 1.50

☐ 1.50 - 1.99

☐ 2.00 - 2.49

☐ 2.50 - 2.99

☐ 3.00 - 3.49

☐ 3.50 - 4.00

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

คำชี้แจง โปรดเลือกในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่าน

เรื่อง	ระดับความพึงพอใจ				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
ด้านเนื้อหาวิชาและการสอน					
1. ความชัดเจนในการกำหนดเค้าโครงในการสอน					
2. ความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน					
3. ความชัดเจนในการอธิบายเกี่ยวกับการวัดและประเมินผลการเรียน					
4. เนื้อหาที่สอนครบถ้วนและตรงกับหลักสูตรปัจจุบัน					
5. การสอนส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล					
6. เทคนิคการสอนกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้					
7. ความชัดเจนในการอธิบายและยกตัวอย่างประกอบ					
8. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับเนื้อหาอื่นๆในวิชาคณิตศาสตร์					
9. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับวิชาอื่น					
10. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับชีวิตประจำวัน					
11. ความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน					
ด้านการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)					
1. การชี้แจงและให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะการใช้ห้องเรียนเสมือนจริงก่อนการเรียน					
2. นักเรียนสามารถทำความเข้าใจและทบทวนเพื่อเรียนรู้เนื้อหาได้ด้วยตนเอง					

เรื่อง	ระดับความพึงพอใจ				
	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
3. นักเรียนสามารถเข้ามาใช้ห้องเรียนเสมือนจริงในเวลาใดก็ได้					
4. นักเรียนสามารถถามตอบข้อสงสัยผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริงได้ทั้งกับเพื่อนและผู้สอน					
5. นักเรียนสามารถส่งใบงานหรืองานที่ครูมอบหมายได้อย่างสะดวก					
6. นักเรียนสามารถแลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง					
7. กิจกรรมในระบบห้องเรียนเสมือนจริงมีความหลากหลายและเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ					
8. ความเหมาะสมของการวัดและประเมินผลการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง					
9. โรงเรียนมีเครื่องคอมพิวเตอร์เพียงพอต่อนักเรียนในการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง					
10. ความเร็วของระบบอินเทอร์เน็ตสำหรับการใช้ห้องเรียนเสมือนจริง					
11. ความเหมาะสมในการนำห้องเรียนเสมือนจริงมาใช้ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุภัณฑ์					

ตอนที่ 3 ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะอื่นๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☺ ขอขอบคุณที่ท่านให้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ ☺

**ตัวอย่างการเรียนการสอน
ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง
(Virtual Classroom)**

<http://122.154.50.89/vc/>



โครงการวิจัยเรื่องการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับสภาพปัญหาที่เกิดขึ้นในสามจังหวัดชายแดนภาคใต้ ซึ่งได้แก่ปัญหาสถานการณ์ความรุนแรงที่เกิดขึ้น การขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ เป็นต้นคณะวิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยนี้จะสามารถพัฒนาศักยภาพทางการเรียนทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสของนักเรียนซึ่งอยู่ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ได้โดยการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ที่ผู้วิจัยปรับปรุงและพัฒนาขึ้น



Welcome

User Name :

Password :

[Login](#)

[ไปถ้าผู้ใช้งานในระบบ](#)

[ลิ้งรหัสผ่าน :: > Click](#)

ผู้วิจัย

นางลลิตา อุดลยศาสน์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

นายไซฟีร์ ทะยิยูโซ๊ะ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

Comments&Suggestions: Virtualclassroom.yru@gmail.com



โครงการวิจัยเรื่องการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับสภาพปัญหาที่เกิดขึ้นในสามจังหวัดชายแดนภาคใต้ ซึ่งได้แก่ปัญหาสถานการณ์ความรุนแรงที่เกิดขึ้น การขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ เป็นต้นคณะวิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยนี้จะสามารถพัฒนาศักยภาพทางการเรียนทางการเรียนเรื่องแคลคูลัสของนักเรียนซึ่งอยู่ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครุคณิตศาสตร์ได้โดยการเรียนผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) ที่ผู้วิจัยปรับปรุงและพัฒนาขึ้น



Welcome

Login : student

- ☒ บทเรียนเรื่องแคลคูลัส
- ☒ สอบป็นัก
- ☒ ส่งใบงาน
- ☒ ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- ☒ แบบประเมินความพึงพอใจ
- ☒ การบท
- ☒ ห้องสมุด
- ☒ ข้อสอบส่วนตัว
- ☒ ออกจากระบบ

ผู้วิจัย

นางลลิตา อุดลยศาสน์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

นายไซฟีร์ ทะยิยูโซ๊ะ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา



VISUAL CALCULUS



Virtual Classroom

โครงการวิจัยระบบการเรียนรู้ออนไลน์แบบการจัดการเรียนการสอนแบบนิเทศศาสตร์วีรณาลัย
วิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์

มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์



Login : student



หน้าหลัก



เกี่ยวกับเรา



ดาวน์โหลด



ติดต่อสอบถาม

-  บทเรียนเรื่องแคลคูลัส
-  อนุพันธ์
-  อินทิกรัล
-  ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์
-  แบบประเมินความพึงพอใจ
-  กระดาน
-  ห้องสนทนา
-  ห้องแชทส่วนตัว
-  ออกจากระบบ



บทเรียนเรื่องแคลคูลัส

....

สารบัญ

การปฐมนิเทศการเรียนการสอน

แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2



VDO ปฐมนิเทศ



เอกสาร
ประกอบการสอน

1. ลิขิตของฟังก์ชัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มีลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
- 1.2 หาขีดซ้าย ขีดขวา และลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปกราฟ
- 1.3 หาขีดซ้าย ขีดขวา และลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปสมการ



VDO การสอน



ใบความรู้



ใบงาน



เอกสาร
ประกอบการสอน

2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : นักเรียนสามารถ

- 2.1 บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มีลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
- 2.2 หาขีดของฟังก์ชันโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
- 2.3 หาขีดของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบและใช้คู่สังยุคได้



หน้าหลัก



เกี่ยวกับเรา

- ส่งใบงาน
- ข้อสอบวัดผลประเมินผล
- แบบประเมินความพึงพอใจ
- กระดาษ
- ห้องสมุด
- ติดต่อประสานงาน
- ติดต่อจากภายนอก

สารบัญ

การปฐมนิเทศการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

1. ลักษณะของฟังก์ชัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : นักเรียนสามารถ

- 1.1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มิลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
- 1.2. หาขีดจำกัดของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าขีดจำกัดค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปกราฟ
- 1.3. หาขีดซ้าย ขีดขวา และขีดของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x=a$ ได้ (ถ้าขีดจำกัดค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปสมการ

2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : นักเรียนสามารถ

- 2.1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มิลิมิตที่ $x=a$ หรือไม่
- 2.2. หาขีดของฟังก์ชันโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
- 2.3. หาขีดของฟังก์ชันโดยใช้วิธีแยกตัวประกอบและใช้คู่สังยุคได้

3. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง : นักเรียนสามารถ

- 3.1. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ หรือไม่เพราะเหตุใด
- 3.2. บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กาหนดให้หรือไม่

eVC Virtual Classroom โครงการวิจัยเรื่องการนิเทศฯในระบบการจัดการเรียนการสอนด้วยระบบวีซีซี (Virtual Classroom) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อำเภอวังน้อย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวโหลด | ติดต่อสอบถาม

สมุดบันทึก

สมุดบันทึก | บันทึกข้อความ | สร้างแฟ้ม | จัดการแฟ้ม

กรุณาป้อนข้อมูลหัวข้อและข้อความที่ต้องการบันทึก จากนั้นเลือกแฟ้มที่ต้องการเก็บ แล้วกดปุ่ม "บันทึกข้อความ" เพื่อทำการบันทึกข้อความ

บันทึกข้อความ

เรื่อง:

ข้อความ:

เลือกเก็บที่แฟ้ม:

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

eVC Virtual Classroom โครงการวิจัยเรื่องการนิเทศฯในระบบการจัดการเรียนการสอนด้วยระบบวีซีซี (Virtual Classroom) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อำเภอวังน้อย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวโหลด | ติดต่อสอบถาม

student

ส่งใบงาน

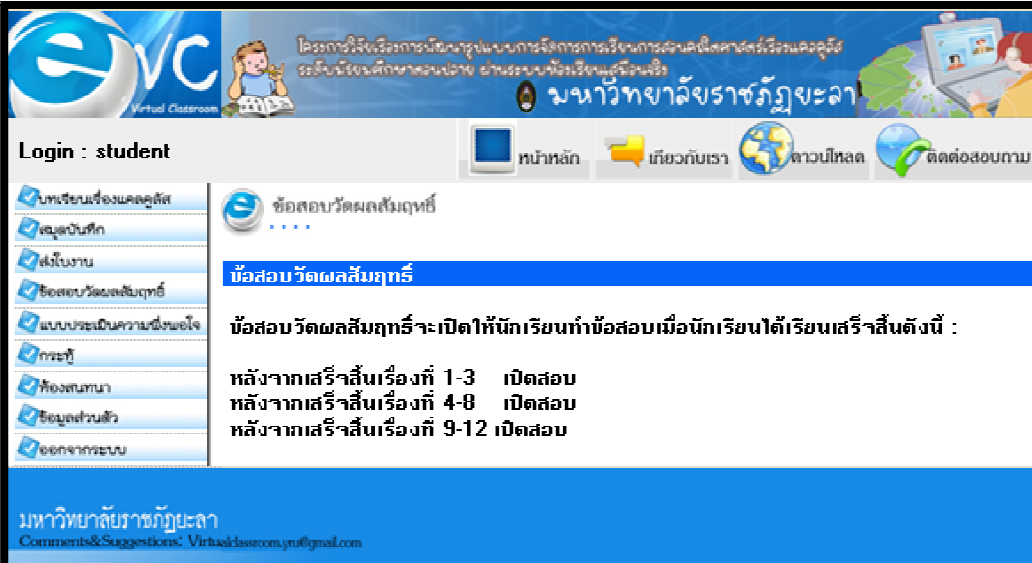
ส่งใบงาน

ชื่อใบงาน:

ไฟล์ใบงาน:

คำอธิบายเพิ่มเติม:

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา
Comments&Suggestions: Virtualclassroom.yg@gmail.com



Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวโหลด | ติดต่อสอบถาม

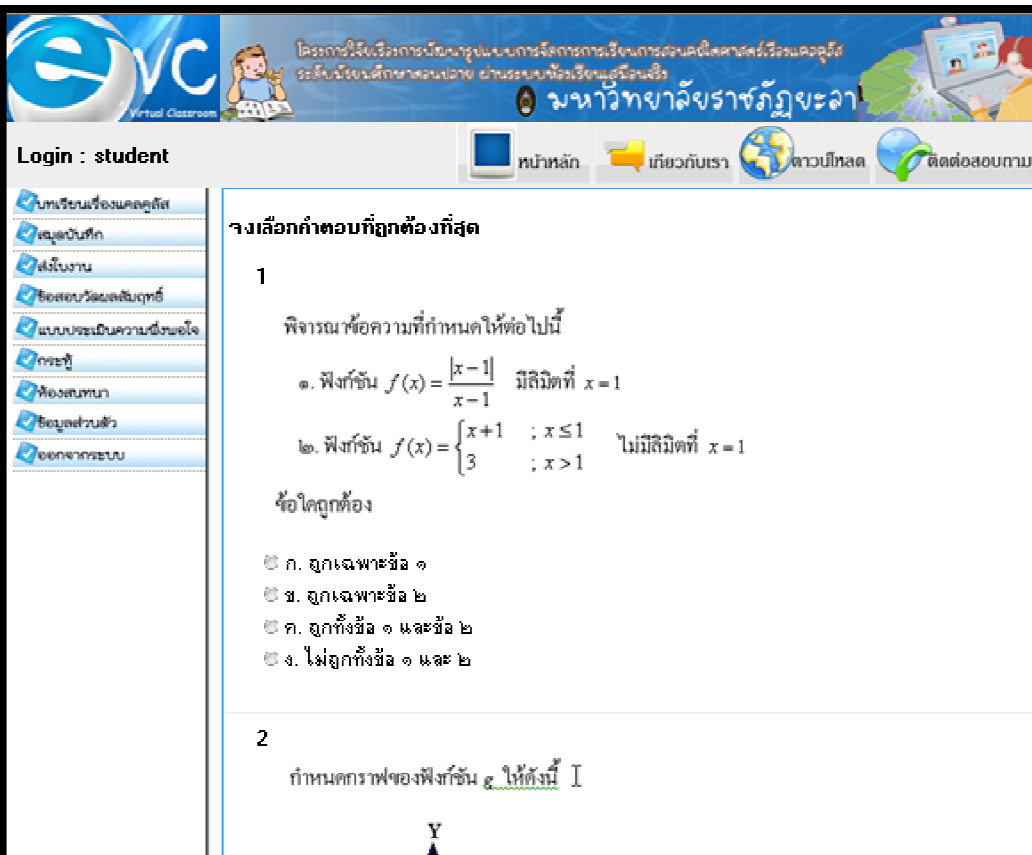
ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์

ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์

ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์จะเปิดให้นักเรียนทำข้อสอบเมื่อนักเรียนได้เรียนเสร็จสิ้นดังนี้ :

หลังจากเสร็จสิ้นเรื่องที่ 1-3 เปิดสอบ
 หลังจากเสร็จสิ้นเรื่องที่ 4-8 เปิดสอบ
 หลังจากเสร็จสิ้นเรื่องที่ 9-12 เปิดสอบ

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา
 Comments&Suggestions: Virtualclassroom.yu@gmail.com



Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวโหลด | ติดต่อสอบถาม

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1

พิจารณาข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

๑. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ มีลิมิตที่ $x=1$

๒. ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \leq 1 \\ 3 & ; x > 1 \end{cases}$ ไม่มีลิมิตที่ $x=1$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ถูกเฉพาะข้อ ๑
 ข. ถูกเฉพาะข้อ ๒
 ค. ถูกทั้งข้อ ๑ และข้อ ๒
 ง. ไม่ถูกทั้งข้อ ๑ และ ๒

2

กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ให้ดังนี้





แบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom)

คำชี้แจง แบบสอบถามนี้เป็นการสำรวจพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการหาแนวทางพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูในสามจังหวัดชายแดนภาคใต้ ข้อมูลดังกล่าวไม่มีผลต่อผู้ตอบแบบสอบถามในทุกกรณี

* Required

ตอนที่ 1 ข้อมูลเบื้องต้นของผู้ตอบแบบสอบถาม

คำชี้แจง โปรดเลือกข้อความต่อไปนี้ตามความเป็นจริง

1. เพศ *

☐ ชาย

☐ หญิง

2. โรงเรียนที่กำลังศึกษา *

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนเรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง

คำชี้แจง โปรดเลือกในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่าน

ด้านเนื้อหาวิชาและการสอน *

	มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1. ความชัดเจนในการกำหนดค่าโครงในการสอน	☐	☐	☐	☐	☐
2. ความชัดเจนของวัตถุประสงค์ของเรื่องที่เรียน	☐	☐	☐	☐	☐
3. ความชัดเจนในการอธิบายเกี่ยวกับประวัติและประเพณีผลการเรียน	☐	☐	☐	☐	☐
4. เนื้อหาที่สอนครบถ้วนและตรงกับหลักสูตรปัจจุบัน	☐	☐	☐	☐	☐
5. การสอนส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล	☐	☐	☐	☐	☐
6. เทคนิคการสอนกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้	☐	☐	☐	☐	☐
7. ความชัดเจนในการอธิบายและยกตัวอย่างประกอบ	☐	☐	☐	☐	☐
8. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับเนื้อหาอื่นๆในวิชาคณิตศาสตร์	☐	☐	☐	☐	☐
9. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับวิชาอื่น	☐	☐	☐	☐	☐
10. การเชื่อมโยงเนื้อหาเรื่องแคลคูลัสกับชีวิตประจำวัน	☐	☐	☐	☐	☐
11. ความรู้ความเข้าใจที่ได้จากการเรียน	☐	☐	☐	☐	☐



โครงการวิจัยระบบการเรียนการสอนแบบการจัดการเรียนการสอนด้วยเทคโนโลยีสารสนเทศและคอมพิวเตอร์
ระบบเรียนออนไลน์ผ่านระบบไอทีเพื่อพัฒนาการเรียน

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ข่าวบลิท | ติดต่อสอบถาม

บทเรียนเรื่องแคลคูลัส

แบบฝึกหัด

ผังงาน

ข้อสอบพร้อมเฉลย

แบบประเมินความพึงพอใจ

การชู้

ห้องสนทนา

ข้อมูลส่วนตัว

ออกจากระบบ

การชู้

No	หัวข้อคำถาม	จากคุณ	ข้อความ	เวลา
000009	ข้อสอบ	nida	01-11-2010 19:01	
000004	เกรียน	yumee	01-11-2010 01:01	
000008	กำหนดค่าตอบมีปัญหาค่ะ	nida	09-12-2010 22:01	
000007	เรื่องปัญหาที่ยังไม่เสร็จครับ	samnusee	09-12-2010 22:01	
000006	ช่วยด้วยค่ะ	lalita	09-12-2010 22:01	
000005	เ้ยเ้ย	nureesam	09-12-2010 12:01	
000003	งดการเรียนภาษา	student	09-12-2010 09:01	
000002	งดสอน	student	09-12-2010 07:00	
000001	Testing	admin	09-12-2010 03:00	

หน้าหลัก | ห้องสนทนา

ห้องแชตของวันนี้

ห้องของวันนี้

07/09/2011 02:23:15	* เียน...น่ารัก เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
07/09/2011 02:24:07	<เียน...น่ารัก> นินา...คือใคร?	ann
07/09/2011 02:24:47	<เียน...น่ารัก> เียน...เล่นด้วยคนได้ไหม	
07/09/2011 02:25:15	<เียน...น่ารัก> เพาะ...อยาก...เียน	
07/09/2011 02:47:28	* 000billeam เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
07/09/2011 02:47:45	*billeam> สลาม	
07/09/2011 02:47:57	*billeam> ทุกคน	
09/09/2011 03:06:42	* admin เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
09/09/2011 03:07:39	* ro เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
09/09/2011 03:08:19	* ลาโด เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
09/09/2011 03:08:58	* Ayuna เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
09/09/2011 07:55:14	* 000billeam เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
22/09/2011 05:52:54	* จิน นุ เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
23/09/2011 05:57:52	* สยาม เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
20/11/2011 01:24:02	* sayang เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
20/11/2011 02:48:08	* ยา เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
27/11/2011 03:49:26	* Dots เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
20/04/2012 23:40:38	* admin เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
20/04/2012 00:45:07	* admin เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
09/04/2012 02:15:01	* อาจารย์ เข้าห้อง ห้องของวันนี้	
12/12/16	* ann เข้าห้อง ห้องของวันนี้	

Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวปีโหลด | ติดต่อสอบถาม

ข้อมูลส่วนตัว

ในหน้านี้คุณสามารถแก้ไขข้อมูลส่วนตัวของคุณได้ในกรณีที่ข้อมูลมีความผิดพลาด หรือต้องการจะแสดงข้อมูลส่วนตัวให้เพื่อนร่วมห้องทราบ รวมทั้งแก้ไขรหัสผ่าน แต่ยกเว้น ชื่อเล่น กับ เลขประจำตัว ของคุณที่ทางเราขอสงวนสิทธิ์ในการเปลี่ยนแปลงแก้ไข

User Name นอกจากจะได้ login เข้าสู่ระบบแล้วยังใช้แสดงแทนตัวคุณ ซึ่งจะปรากฏในกล่องเรียนส่วนตัวของคุณจะถูกเก็บเป็นความลับ นอกจากคุณต้องการจะเปิดเผย โดยทำการเลือกเช็คบ็อก (checkbox) ด้านหน้าข้อมูลนั้น กรุณาป้อนอีเมล หรือเบอร์โทรของคุณให้ถูกต้องเพื่อสะดวกในการติดต่อกลับ

หมายเหตุ : เครื่องหมาย * หลังข้อมูล แสดงว่าเป็นข้อมูลสำคัญ ท่านจะต้องกรอกให้ครบถ้วนสมบูรณ์

> รายละเอียดการตั้ง User Name และ Password

User Name: *

Password: * ใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษมากกว่า 6

ยืนยันรหัสผ่าน (confirm password): *

เลขประจำตัว:

> ข้อมูลส่วนตัว

☐ ชื่อจริง: *

☐ นามสกุล: *

☐ E-mail: *

Login : student

หน้าหลัก | เกี่ยวกับเรา | ดาวปีโหลด | ติดต่อสอบถาม

เกี่ยวกับเรา

ชื่อโครงการวิจัย

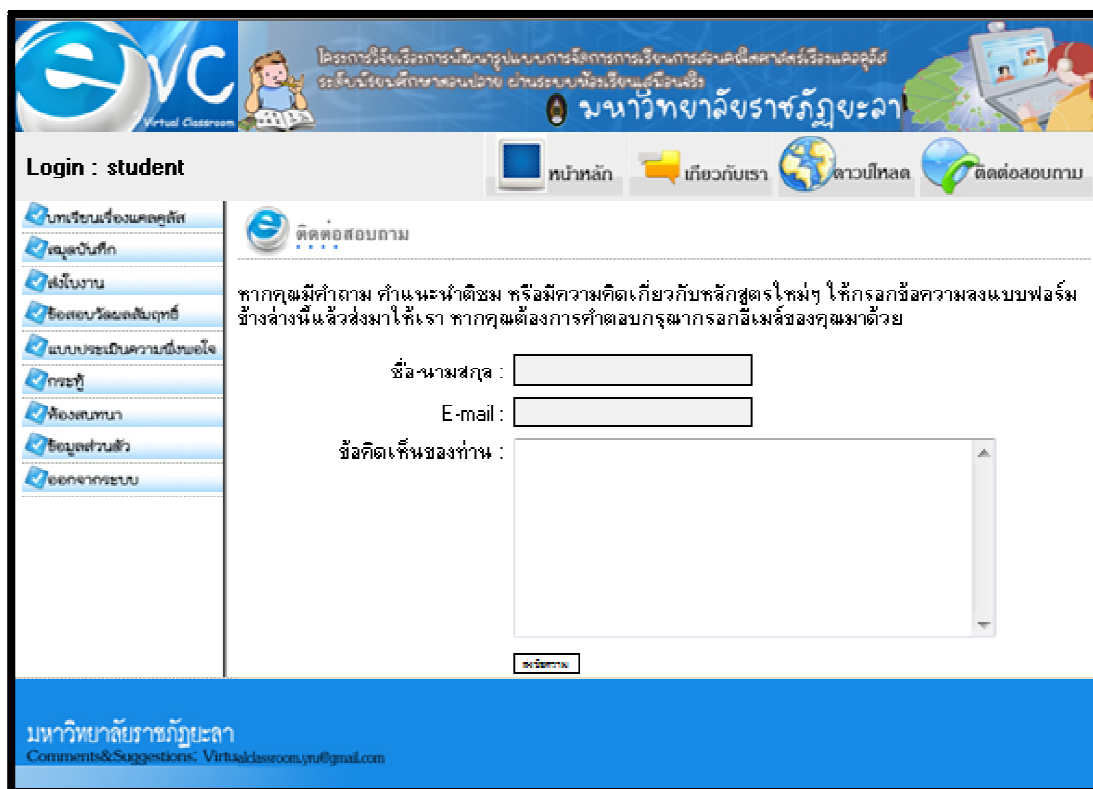
(ภาษาไทย)
การพัฒนาารูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแคลคูลัสที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผ่านระบบห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classroom) สำหรับโรงเรียนที่ขาดแคลนครูคณิตศาสตร์ใน 3 จังหวัดชายแดนภาคใต้

(ภาษาอังกฤษ)
The Development of Mathematics Instruction on Calculus Emphasizing Connection Skills for High School Students By Using Virtual Classroom to Remedy The Deficiency of Mathematics Teacher in The Three Southern Border Provinces.

คณะผู้วิจัย

นางลิลลา อตุลยศาสน์ (Mrs. Lilla Adulyasas) หัวหน้าโครงการ 60 %
นายไซเฟอร์ หะยียูโซ๊ะ (Mr. Sofee Hayeyusoh) นักวิจัยร่วม 40 %

หน่วยงานที่รับผิดชอบ



VC Virtual Classroom

โครงการวิจัยหรือการนิเทศนารูปแบบการจัดการเรียนการสอนด้วยเทคโนโลยีสารสนเทศ
ระบบเรียนออนไลน์ผ่านระบบวีซีเอ็มเอช

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

Login : student

หน้าหลัก เกี่ยวกับเรา ดาวโหลด ติดต่อสอบถาม

- ✓ บทเรียนเรื่องแคลคูลัส
- ✓ คู่มือบันทึก
- ✓ ส่งใบงาน
- ✓ ข้อสอบวัดผลประเมินฤทธิ์
- ✓ แบบประเมินความพึงพอใจ
- ✓ กระดาน
- ✓ ห้องสนทนา
- ✓ ข้อมูลส่วนตัว
- ✓ ออกจากระบบ

ติดต่อสอบถาม

หากคุณมีคำถาม คำแนะนำติชม หรือมีความคิดเกี่ยวกับคลัสเตอร์ใหม่ๆ ให้กรอกข้อความลงแบบฟอร์มข้างล่างนี้แล้วส่งมาให้เรา หากคุณต้องการคำตอบกรุณากรอกอีเมลล์ของคุณมาด้วย

ชื่อนามสกุล :

E-mail :

ข้อความที่ท่าน :

ส่งข้อความ

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา
Comments&Suggestions: Virtualclassroom.jnu@gmail.com

ท่านสามารถเข้าใช้ห้องเรียนเสมือนจริงได้ที่

<http://122.154.50.89/vc/>

รายชื่อโรงเรียนกลุ่มตัวอย่าง

1. จังหวัดยะลา

โรงเรียนกาบังพิทยาคม

เลขที่ 3 หมู่ 5 ต.กาบัง อ.กาบัง จ.ยะลา

2. จังหวัดปัตตานี

โรงเรียนสายบุรี “แจ้งประชากร”

เลขที่ 16 ถนนสายบุรี ตำบลตะลุบัน อำเภอสายบุรี จังหวัดปัตตานี

3. จังหวัดนราธิวาส

โรงเรียนบาเจาะ

เลขที่ 16 หมู่ 2 ตำบลบาเจาะ อำเภอบาเจาะ จังหวัดนราธิวาส

ประวัติย่อผู้วิจัย

1) หัวหน้าโครงการ

1. ชื่อ-นามสกุล (ภาษาไทย) นางสาวลิลลา อุดุลยศาสน์

(ภาษาอังกฤษ) Mrs.Lilla Adulyasas

2. เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3 9599 00082 229

3. ตำแหน่งปัจจุบัน พนักงานมหาวิทยาลัยสายผู้สอน สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร

4. หน่วยงาน มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

สถานที่อยู่ติดต่อได้สะดวก สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
เทคโนโลยีและการเกษตร

หมายเลขโทรศัพท์ 0814427335 , 073215766

โทรสาร -

ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) lilla_ads@hotmail.com

5. ประวัติการศึกษา

ปีที่สำเร็จ	ระดับปริญญา (ตรี โท เอก)	อักษรย่อปริญญา	สาขาวิชา	ชื่อสถาบัน	ประเทศ	เกรดเฉลี่ย
2545	ปริญญาตรี	ค.บ.	คณิตศาสตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	ไทย	3.07
2549	ปริญญาโท	กศ.ม.	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร	ไทย	3.86

6. สาขาวิชาการที่มีความชำนาญพิเศษ คณิตศาสตร์ศึกษา (Mathematical Education)

7. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ

7.1 ผู้อำนวยการแผนงานวิจัย : -

7.2 หัวหน้าโครงการวิจัย : -

7.3 งานวิจัยที่ทำเสร็จแล้ว :

1) กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์ปัญหาสมการที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปีที่พิมพ์ พ.ศ. 2549

การเผยแพร่ เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

2) ศึกษาปัญหาการฝึกประสบการณ์วิชาชีพของนักศึกษาโครงการความร่วมมือกับคณะครุศาสตร์ สาขาการศึกษา ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

ปีที่พิมพ์ พ.ศ. 2553

การเผยแพร่ เสนอต่อสถาบันวิจัยและพัฒนาชายแดนใต้ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

3) ศึกษาปัญหาการฝึกประสบการณ์วิชาชีพของนักศึกษาโครงการความร่วมมือกับคณะครุศาสตร์ สาขาการศึกษา ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

ปีที่พิมพ์ พ.ศ. 2553

การเผยแพร่ เสนอต่อสถาบันวิจัยและพัฒนาชายแดนใต้ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

4) การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง อินทิกรัล ในรายวิชาแคลคูลัส 1 ของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

ปีที่พิมพ์ พ.ศ. 2553

การเผยแพร่ เสนอต่อสถาบันวิจัยและพัฒนาชายแดนใต้ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

7.4 งานวิจัยที่กำลังทำ : -

2) นักวิจัยร่วม

1. ชื่อ-นามสกุล (ภาษาไทย) นายโซฟีร์ หะยียูโซ๊ะ

(ภาษาอังกฤษ) Mr. Sofee Hayeyusoh

2. เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 5 9499 99001 397

3. ตำแหน่งปัจจุบัน พนักงานมหาวิทยาลัยสายผู้สอน สาขาวิชาคอมพิวเตอร์ธุรกิจ คณะ
วิทยาการจัดการ

4. หน่วยงาน มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

สถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก สาขาวิชาคอมพิวเตอร์ธุรกิจ คณะวิทยาการจัดการ

หมายเลขโทรศัพท์ 0895985533

โทรสาร -

ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) hsofee@hotmail.com

5. ประวัติการศึกษา

ปีที่จบ	ระดับปริญญา (ตรี โท เอก)	อักษรย่อ ปริญญา	สาขาวิชา	ชื่อสถาบัน	ประเทศ	เกรด เฉลี่ย
2541	ปริญญาตรี	วท.บ.	วิทยาการคอมพิวเตอร์	สถาบันราชภัฏสุราษฎร์ธานี	ไทย	2.70
2548	ปริญญาโท	MSC.IT	Information Technology	University Utara Malaysia	มาเลเซีย	3.20

6. สาขาวิชาการที่มีความชำนาญพิเศษ การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และ ระบบ
ฐานข้อมูล

7. ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ

7.1 ผู้อำนวยการแผนงานวิจัย : -

7.2 หัวหน้าโครงการวิจัย : -

7.3 งานวิจัยที่ทำเสร็จแล้ว :

- 1) Visual Reality of CS.Pattani Hotel By Panoramic View

ปีที่พิมพ์ พ.ศ. 2548

การเผยแพร่ เสนอต่อ Graduate Schools of University Utara

Malaysia.

7.4 งานวิจัยที่กำลังทำ : -